

УДК 531.8

Р. М. Киракосян, М. С. Саркисян

Свободные продольные колебания ортотропных полос линейно-переменной толщины при учете обжатия

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 4/VII 2003)

1. Рассмотрим ортотропную пластинку-полосу. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью, направив ось x вдоль ширины, а ось y -вдоль одной из кромок полосы. Главные направления анизотропии материала параллельны координатным осям. Толщина полосы изменяется вдоль ширины по закону

$$h = h_0 \left(1 - \delta \frac{x}{l} \right), \quad h_0 > 0, \quad \delta < 1. \quad (1.1)$$

Здесь l -ширина полосы, h_0 и δ - заданные постоянные. Полоса закреплена вдоль кромки $x = 0$ и растянута равномерно распределенными силами погонной интенсивности P , приложенными на кромке $x = l$. Рассмотрим задачу о свободных продольных колебаниях полосы, возникающих после ее внезапного освобождения от сил. Будем пользоваться уравнениями и соотношениями [1], учитывающими влияние обжатия. Родственная задача для стержней переменного поперечного сечения в классической постановке рассмотрена в [2].

Второе уравнение плоской задачи полосы [1] удовлетворяется автоматически, а первое с учетом сил инерции можно представить в виде

$$\delta^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial H^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial H} \right) = \frac{l^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

Здесь u -перемещение вдоль оси x , t -время, ρ -плотность материала полосы,

$$H = 1 - \delta \frac{x}{l}, \quad a^2 = \frac{4B_{11}}{\rho(4+A_1\delta^2s^2)}, \quad s = \frac{h_0}{l}. \quad (1.3)$$

Величины B_{11} и A_1 выражаются через соответствующие модули Юнга E_i и коэффициенты Пуассона материала ν_{ij} по известным формулам [4]:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_1 = -\frac{E_1}{E_3} \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}. \quad (1.4)$$

Отметим, что влияние обжатия в данной задаче учитывается параметром A_1 . Положив в (1.2)

$$u(H,t) = X(H)T(t), \quad (1.5)$$

приходим к следующим двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial H^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial X}{\partial H} + \frac{\omega^2}{\delta^2} X = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{a^2}{l^2} \omega^2 T = 0, \quad (1.6)$$

где ω - произвольная вещественная постоянная. Общие решения уравнений (1.6) имеют вид

$$X = C_1 J_0 \left(\frac{\omega}{\delta} H \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{\omega}{\delta} H \right), \quad (1.7)$$

$$T = C_3 \cos \frac{\omega a}{l} t + C_4 \sin \frac{\omega a}{l} t. \quad (1.8)$$

Здесь J_0 и Y_0 - бесселевы функции нулевого индекса первого и второго родов соответственно. C_i - неизвестные постоянные, подлежащие определению из граничных и начальных условий задачи:

1) при $H = 1$, $u = 0$; 3) при $t = 0$, $[(\partial u)/(\partial t)] = 0$

2) при $H = 1 - \delta$, $[(\partial u)/(\partial H)] = 0$; 4) при $t = 0$, $u = -[(P(4 + A_1 \delta^2 s^2))/(4B_{11} \delta s)] \ln H$. (1.9)

Из первых двух условий (1.9) следует

$$\begin{aligned} C_1 J_0 \left(\frac{\omega}{\delta} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{\omega}{\delta} \right) &= 0, \\ C_1 J_1 \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) + C_2 Y_1 \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) &= 0, \quad \lambda = \frac{\delta}{1-\delta}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

а из третьего условия - $C_4 = 0$. Из (1.10) для определения ω получается трансцендентное уравнение, которое имеет бесконечное множество корней ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$J_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) Y_1 \left(\frac{\omega_n}{\lambda} \right) - Y_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) J_1 \left(\frac{\omega_n}{\lambda} \right) = 0. \quad (1.11)$$

В случае полосы постоянной толщины $\delta = 0$ уравнение (1.11) сводится к уравнению

$$\cos \omega_n = 0, \quad (1.12)$$

корнями которого являются числа

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.13)$$

Выразив C_2 через C_1 , можно общее решение задачи представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[Y_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) J_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} H \right) - J_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) Y_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} H \right) \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t. \quad (1.14)$$

Следуя [2] и используя четвертое условие (1.9), можно определить коэффициенты B_n , после чего формула перемещения примет следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{\pi P}{s(1-\delta)} \cdot \frac{4 + A_1 \delta^2 s^2}{4B_{11}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) J_1 \left(\frac{\omega_n}{\lambda} \right)}{\omega_n \left[J_0^2 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) - J_1^2 \left(\frac{\omega_n}{\lambda} \right) \right]} \times \left[Y_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) J_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} H \right) - J_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} \right) Y_0 \left(\frac{\omega_n}{\delta} H \right) \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t. \quad (1.15)$$

В случае полосы постоянной толщины приходим к формуле, аналогичной формуле перемещения стержня постоянного поперечного сечения [2,3]

$$u(x, t) = \frac{8P}{B_{11} s \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t, \quad a = \frac{B_{11}}{\rho}. \quad (1.16)$$

2. Корни трансцендентных уравнений (1.11) и (1.12) не зависят ни от ширины полосы, ни от механических свойств ее материала. Они определяются заданием лишь параметра

$$\delta = - \frac{1}{s} \frac{dh}{dx}, \quad (2.1)$$

что зависит только от отношения толщин краев полосы. В таблице представлены первые четыре корня ω_n для некоторых значений δ .

n	δ	-10	-1	-0.4	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
1		0.709	1.361	1.466	1.571	1.642	1.735	1.864	2.059	2.405
2		4.246	4.646	4.679	4.712	4.737	4.775	4.839	4.986	5.519
3		7.470	7.814	7.834	7.854	7.869	7.892	7.933	8.038	8.653
4		10.658	10.967	10.981	10.996	11.006	11.023	11.053	11.133	11.790

Круговые частоты свободных продольных колебаний полосы определяются формулой

$$\Omega_n = \frac{\omega_n a}{1} = \frac{2\omega_n}{1} \sqrt{\frac{B_{11}}{\rho(4 + A_1 \delta^2 s^2)}}. \quad (2.2)$$

Соответствующие классические значения $\Omega_n^{\text{кл}}$, которые получаются без учета обжатия, будут

$$\Omega_n^{\text{кл}} = \frac{\omega_n}{1} \sqrt{\frac{B_{11}}{\rho}} \quad (2.3)$$

Следовательно,

$$\Omega_n = \frac{2}{\sqrt{(4 + A_1 \delta^2 s^2)}} \cdot \Omega_n^{\text{кл}}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) заключаем:

1. В случае постоянной толщины ($\delta = 0$) учет обжатия не влияет на значения собственных частот продольных колебаний полосы Ω_n .
2. Так как $A_1 < 0$, то учет обжатия при переменности толщины приводит к увеличению собственных частот, т.е. $\Omega_n > \Omega_n^{\text{кл}}$. Причем это не зависит от знака δ , т.е. от того, как изменяется толщина полосы с удалением от ее закрепленного края - убывает она или возрастает.
3. Увеличение Ω_n не зависит от номера n , т.е. оно одинаково для всех собственных частот.
4. Влияние обжатия на значение Ω_n обычно мало. Например, в случае изотропной полосы при $\nu = 1/3$ и $dh/dx = 1/4$ имеем

$$A_1 = -0.5, \quad \delta^2 s^2 = 1/16, \quad \Omega_n = 1.004 \Omega_n^{\text{кл}}, \quad (2.5)$$

В данном случае учет обжатия увеличивает значения всех частот лишь на 0.4%. Однако в настоящее время существуют такие композиционные ортотропные материалы, модуль Юнга которых в поперечном направлении на один, два порядка меньше, чем в направлении армирования. При таких материалах влияние обжатия на значения Ω_n может оказаться существенным. Например, при $A_1 = -10$, что для отмеченных материалов вполне реально, в случае $dh/dx = 1/4$ имеем

$$\Omega_n = 1.089 \Omega_n^{\text{кл}}, \quad (2.6)$$

т.е. учет обжатия примерно на 9% увеличивает собственные частоты. Разумеется, при материалах с более сильной анизотропией эта цифра будет еще большей.

5. Данные таблицы с учетом (2.3) показывают, что в случае отрицательных δ , т.е. когда с удалением от закрепленного края полоса утолщается, классические частоты $\Omega_n^{\text{кл}}$ становятся меньше частот соответствующей полосы постоянной толщины. Причем чем сильнее утолщается полоса (чем больше абсолютное значение δ), тем сильнее уменьшаются частоты. Этот факт физически можно объяснить тем, что утолщение полосы как бы играет роль добавления к полосе постоянной толщины присоединенных масс. Аналогично можно объяснить и обратное явление - увеличение классических частот при положительных δ . В этом случае с удалением от закрепленного края полоса утоньшается, что равносильно отбавлению масс от соответствующей полосы постоянной толщины.

6. Так как $A_1 < 0$, то с ростом $|dh/dx| = |\delta|s$ знаменатель (2.4) уменьшается. При положительных δ это приведет к усилению возрастания неклассических частот, поскольку в этом случае убывание знаменателя дроби (2.4) сопровождается ростом ее числителя. В случаях же отрицательных δ с ростом $|\delta|s$ одновременно убывают и знаменатель и числитель (2.4). Это приведет к ослаблению уменьшения неклассических частот. Возможны случаи, когда учет обжатия при $\delta < 0$ приведет к тому, что частоты сравняются и даже станут больше соответствующих частот полосы постоянной толщины. Например, при $\delta = -1$, $s = 1/8$, $A_1 = -64$ имеет место равенство

$$\Omega_1|_{\delta=-1} = 1.571 = \Omega_1|_{\delta=0}. \quad (2.7)$$

В случае же $\delta = -1$, $s = 1/8$, $A_1 = -80$ первая частота становится больше первой частоты полосы постоянной толщины:

$$\Omega_1|_{\delta=-1} = 1.641 > \Omega_1|_{\delta=0} = 1.571. \quad (2.8)$$

Материалы с такими значениями параметра A_1 очень сильно анизотропны. Модуль Юнга таких материалов в поперечном направлении примерно на два порядка меньше, чем в направлении армирования.

Институт механики НАН РА

Литература

1. *Киракосян Р. М.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55, 4. С.12-23
2. *Гаспарян А. Е., Хачатрян А. А.* - Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т. 47. N 5-6. С.14-23
3. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Физматгиз. 1959. 440 с.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Մ. Ս. Սարգսյան

**Գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ շերտի երկայնական
տատանումները ընդլայնական սեղմման հաշվառմամբ**

Ստացվել է գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ շերտի ազատ երկայնական տատանումների հաճախությունների հավասարումը [1] տեսության շրջանակներում: Որոշվել են առաջին չորս սեփական հաճախությունները հաստության փոփոխման վարքը նկարագրող պարամետրի մի շարք արժեքների դեպքում: Ստացվել է տեղափոխության բանաձևը: Կատարվել են քանակական և որակական եզրակացություններ երկայնական տատանումների սեփական հաճախությունների վրա ընդլայնական սեղմման և շերտի հաստության փոփոխման ազդեցությունների վերաբերյալ: