

УДК 519.21

Э. А. Даниелян, Э. А. Симонян

Обобщение закона сохранения Клейнрока

(Представлено академиком А. А. Терзяном 8/V 2003)

В классе консервативных дисциплин модели $M_r |G_r|1|^\infty$ действуют универсальные законы сохранения. К их числу относится закон сохранения работы Л. Клейнрока, связывающий средние стационарные времена ожидания вызовов различных потоков (см. [1], с. 138), при недопущении прерываний обслуживания. В настоящей работе данный закон сохранения обобщен на случай допущения прерываний обслуживания и применен к дисциплине абсолютных приоритетов.

В одноканальную систему обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1 > 0$, ..., $a_r > 0$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы, не зависят от процесса поступления и для k-вызовов, $k = \overline{1, r}$, имеют функцию распределения (ФР) $B_k(x)$, $B_k(+0) = 0$.

В рамках описанной модели $M_r |G_r|1|^\infty$ рассмотрим класс консервативных дисциплин, для которых внутри потоков действует дисциплина FIFO (first in - first out). Дисциплина обслуживания консервативна, если внутри модели работа (время обслуживания) не возникает и не исчезает, а лишь привносится в модель поступлением вызовов. Обозначим

$$R = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r, \quad W_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r a_k \beta_{k2},$$

где

$$\rho_k = a_k \beta_{k1}, \quad \beta_{ki} = \int_0^\infty x^i dB_k(x), \quad k = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2.$$

Если консервативная дисциплина обслуживания задается на первом периоде занятости модели $M_r |G_r|1|^\infty$ и в точности повторяется на последующих периодах занятости, то в работах [2,3] развит метод доказательства существования при $R < 1$ вводимых ниже стационарных характеристик. В настоящей работе рассмотрен именно такой подкласс консервативных дисциплин.

Нас интересуют следующие средние стационарные характеристики:

W_k , $k = \overline{1, r}$, - среднее стационарное время ожидания k -вызова до момента первого его поступления на прибор;

V_k , $k = \overline{1, r}$, - среднее стационарное время ожидания k -вызова в очереди до момента ухода его из модели обслуженным;

U_k , $k = \overline{1, r}$, - среднее стационарное время пребывания k -вызова в модели, т.е. время с момента поступления k -вызова в модель до момента ухода его из модели обслуженным;

H_k , $k = \overline{1, r}$, - среднее (условно) стационарное время пребывания k -вызова на приборе, т.е. среднее время, начинающееся с момента первого поступления k -вызова на прибор и завершающееся моментом ухода его из модели.

При недопущении прерываний обслуживания $W_k = V_k$, $H_k = \beta_{k1}$, а в общем случае

$$U_k = W_k + H_k = V_k + \beta_{k1}, \quad k = \overline{1, r} \quad (1)$$

При недопущении прерываний обслуживания закон сохранения работы Л. Клейнрока в предположении $R < 1$ записывается в виде

$$\sum_{k=1}^r \rho_k \cdot W_k = \frac{RW_0}{1 - R}. \quad (2)$$

Закон сохранения (2) позволяет сделать следующее обобщение.

Теорема. При $R < 1$ в рассматриваемом подклассе консервативных дисциплин (с прерываниями или без прерываний обслуживания) модели $M_r |G_r|1|^\infty$ имеет место следующий закон сохранения:

$$\sum_{k=1}^r \rho_k \cdot W_{km} + \sum_{k=1}^r a_k \cdot \frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}} H_k = \frac{W_0}{1-R}. \quad (3)$$

Если прерывания обслуживания не допускаются, то (2) следует из (3). Действительно, в данном случае $H_k = \beta_{k1}$, $k = \overline{1, r}$, и

$$\sum_{k=1}^r a_k \cdot \frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}} H_k = W_0,$$

откуда и из (3) следует (2).

Примером консервативной дисциплины с прерываниями обслуживания, для которой справедлива формула (3), является дисциплина абсолютных с дообслуживанием приоритетов (см., например, [2]). Именно, i -вызов, поступая в модель, замещает j -вызов на приборе при $i < j$. Прерванный j -вызов возвращается в очередь и при новом попадании на прибор дообслуживается. В очереди i -вызовы становятся впереди j -вызовов при $i < j$.

Из (3) вытекает следующий известный результат: при $R < 1$ и дисциплине абсолютных с дообслуживанием приоритетов в модели $M_r |G_r|1|\infty$

$$W_k = \frac{W_0^k}{(1 - R_{k-1})(1 - R_k)}, \quad k = \overline{1, r} \quad (4)$$

где

$$R_k = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r, \quad W_0^k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i \beta_{i2}, \quad k = \overline{1, r}, \quad R_0 = 0.$$

Действительно, отметим, что стационарное время пребывания k -вызова на приборе h_k представимо в виде

$$h_k \stackrel{d}{=} b_k + \sum_{i=1}^{v_k} \pi_{k-1}^{(i)}, \quad (5)$$

где символ d указывает на совпадение ФР обеих частей равенства. Здесь: b_k - случайное время обслуживания k -вызова; $\pi_{k-1}^{(i)}$ одинаково распределены с периодом занятости обслуживанием $\overline{1, k-1}$ -вызовов (1 -вызовов, ..., $(k-1)$ -вызовов); v_k - случайное число $\overline{1, k-1}$ -вызовов, поступающих в модель за b_k , не зависящее от $\{\pi_{k-1}^{(i)}\}$.

Переходя в (5) к математическим ожиданиям, по формуле Вальда получаем

$$H_k = \beta_{k1} \cdot \{1 + \sigma_{k-1} \cdot \Pi_{k-1}\}, \quad (6)$$

где $\sigma_{k-1} = a_1 + \dots + a_{k-1}$, Π_{k-1} - среднее периода занятости обслуживанием $\overline{1, k-1}$ -вызовов. Π_{k-1} совпадает со средним периода занятости модели $M |G|1|\infty$ с параметром σ_{k-1} поступления и с ФР

$$\sum_{i=1}^{k-1} (a_i / \sigma_{k-1}) B_i(x), \quad x \geq 0,$$

времени обслуживания вызовов. Поэтому $\sigma_{k-1}\Pi_{k-1} = R_{k-1}/(1-R_{k-1})$. Подставляя эти равенства в (6), находим

$$H_k = \frac{\beta_{k1}}{1 - R_{k-1}}, \quad k = \overline{1, r}. \quad (7)$$

Поскольку при каждом $k = \overline{1, r-1}$ потоки $(k+1)$ -вызовов, ..., r -вызовов не влияют на величины W_i и H_i , $i = \overline{1, k}$, то для абсолютных с дообслуживанием приоритетов из (3) и (7) следует система уравнений

$$\sum_{i=1}^k \rho_i W_i + \sum_{i=1}^k \frac{a_i \beta_{i2}}{2 \cdot (1 - R_{i-1})} = \frac{W_0^{(k)}}{1 - R_k}, \quad k = \overline{1, r}. \quad (8)$$

Вычитая из k -того уравнения (8) $(k-1)$ -ое, находим

$$\rho_k W_k = W_0^{(k)} \cdot \left\{ \frac{1}{1 - R_k} - \frac{1}{1 - R_{k-1}} \right\} = \rho_k \cdot \frac{W_0^{(k)}}{(1 - R_{k-1})(1 - R_k)}, \quad k = \overline{1, r},$$

что равносильно (4).

Набросок доказательства теоремы дан в приложении.

Приложение. В любой момент времени в модели есть не более одного прерванного вызова каждого потока.

Обозначим: $N_k(t)$ - число еще не тронутых обслуживанием k -вызовов в модели в момент t ; $T_k(t)$ - число k -вызовов в модели в момент t , успевших побывать на приборе; $L_k(t)$ равно единице, если в момент t обслуживается k -вызов, и равно нулю в противном случае.

Введенные процессы являются регенерирующими. К ним применима теорема из [3], с. 430. Как и в [4], при $R < 1$ и $t \rightarrow +\infty$ для них существуют стационарные аналоги N_k , T_k и L_k . При этом

$$P(L_k = 1) = P(T_k = 1) = \rho_k > 0, \quad k = \overline{1, r} \quad (9)$$

где P - знак вероятности.

Пусть: x_{ik} - длительность обслуживания i -того k -вызова из числа $N_k(t)$; $y_k(t)$ - условное остаточное время обслуживания тронутого в момент t обслуживанием k -вызова при условии $T_k(t) = 1$.

Из временной оси выкинем промежутки, за которые не было тронутых обслуживанием k -

вызовов, и уплотним временную ось. На временной оси каждому моменту t соответствует на уплотненной временной оси момент $u = \zeta_k(t)$. Из уплотненной временной оси выкинем промежутки, за которые на приборе находится k -вызов, и образуем дважды уплотненную временную ось. Каждому моменту u на уплотненной оси соответствует момент $v = \xi_k(u)$ на дважды уплотненной.

В силу (9), по усиленному закону больших чисел,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \zeta_k(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_k(\zeta_k(t)) = +\infty \quad \text{почти всюду.} \quad (10)$$

Величина $y_k(t)$ интерпретируется как остаточное время восстановления в момент $\xi_k(\zeta_k(t))$ на дважды уплотненной временной оси для процесса восстановления $\{\xi_k^{(i)}\}$, где $\xi_k^{(i)}$, $i \geq 1$, независимы и имеют ФР $B_k(t)$. Поэтому существует стационарный при $t \rightarrow +\infty$ аналог y_k величины $y_k(t)$ (см. (10)), причем

$$My_k = (\beta_{k2}/2\beta_{k1}), \quad k = \overline{1, r}, \quad (11)$$

где M - знак математического ожидания. Справедливо равенство

$$w(t) = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^{N_k(t)} x_{ik} + \begin{cases} y_k(t), & \text{если } T_k(t) = 1 \\ 0, & \text{если } T_k(t) = 0 \end{cases} \right), \quad t \geq 0,$$

где $w(t)$ - накопленная и не выполненная к моменту t работа.

Отсюда по формуле Вальда ($N_k(t)$ не зависит от будущего),

$$Mw(t) = \sum_{k=1}^r (\beta_{k1} \cdot MN_k(t) + P\{T_k(t) = 1\} \cdot My_k(t)). \quad (12)$$

Поскольку существуют предел $[(W_0)/(1-R)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} Mw(t)$ (см., например, [2]) и стационарные N_k , T_k и My_k , $k = \overline{1, r}$, то, переходя к пределу $t \rightarrow +\infty$ в (12), с учетом $P\{T_k = 1\} = MT_k$ и (11), получаем

$$\frac{W_0}{1-R} = \sum_{k=1}^r \beta_{k1} \cdot MN_k + \sum_{k=1}^r \frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}} MT_k. \quad (13)$$

По формулам Литтля для средних характеристик, используя (1), имеем

$$MN_k = a_k W_k, \quad M(N_k + T_k) = a_k U_k = a_k W_k + a_k H_k, \quad k = \overline{1, r}.$$

Подставляя последние равенства в (13), выводим (3).

Ереванский государственный университет

Литература

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М. Мир. 1979. 600 с.
2. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М. Наука. 1966.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М. Мир. 1984. 751 с.
4. *Даниелян Э. А., Хачикян Т. З.*- Уч. зап. ЕГУ. 2001. N1. С. 4-22.

Է. Ա. Դանիելյան, Է. Ա. Միմոնյան

Կլեյնրոկի պահպանման օրենքի ընդհանրացում

M_r $|G_r|1|^\infty$ մոդելի պահպանողական հերթակարգերի դասում գործում են ունիվերսալ պահպանման օրենքներ: Նրանց թվին է պատկանում Լ. Կլեյնրոկի աշխատանքի պահպանման օրենքը, որը կապում է միմյանց հետ տարբեր հոսքերի պահանջների ստացիոնար սպասման ժամանակների միջին արժեքները՝ սպասարկման ընդհատումներ թույլ չտալու պայմաններում:

Այս աշխատանքում նշված պահպանման օրենքն ընդհանրացվում է այն դեպքի համար, երբ սպասարկման ընդհատումները թուլատրելի են: Ստացված արդյունքն օգտագործվում է բացարձակ նախապատվությամբ հերթակարգի համար: