

УДК 517.518.8, 517.538.3, 517.982

Академик А. Б. Нерсисян

Об одном обобщении аппроксимации Паде

(Представлено 25/VI 2003)

1. Схема для бесконечных рядов

1.1. Рассмотрим Банахово пространство B над полем комплексных чисел и некоторый базис $\{\alpha_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) в нем.

Пусть задан степенной ряд (производящая функция системы $\{\alpha_n\}$)

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n w^n \alpha_n, \quad \{g_n\} \subset \mathbb{C}, \quad w \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

сходящийся при $|w| < R_g$ ($0 < R_g \leq \infty$) и $g_n \neq 0$ при $n \geq N_g$.

Для произвольного $f \in B$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n$, и целого $N \geq 0$ обозначим

$$S_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \alpha_n, \quad R_N(f) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \alpha_n. \quad (2)$$

Таким образом, $f = S_N(f) + R_N(f)$. Согласно формуле суммирования по частям Абеля имеем

$$R_N(f) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n \beta_n = b_N w^{-N} \sum_{k=N}^{\infty} w^k \beta_k + \sum_{n=N}^{\infty} (b_{n+1} - b_n w) w^{-n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} w^k \beta_k, \quad (3)$$

где $b_n = a_n / g_n$, $\beta_n = g_n \alpha_n$, $n \geq N_g$ и $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, $|w| < R_g$.

Для заданного конечного множества комплексных чисел $\{w_k\}$, $w_k \neq 0$, $|w_k| < R_g$, $k = 1, 2, \dots, m$, введем в рассмотрение следующие рекуррентно определяемые последовательности:

$$\Delta_n^0 = b_n, \quad \Delta_n^k = \Delta_{n+1}^{k-1} - w_k \Delta_n^{k-1}, \quad n \geq N, \quad 1 \leq k \leq m \quad (4)$$

$$U_1(n, k) = w_1^1, \quad U_p(n, k) = \sum_{s=n+1}^{k-p+1} \left(\frac{w_p}{w_{p-1}} \right)^s U_{p-1}(s, k)$$

$$2 \leq p \leq m, \quad n \geq N-1, \quad k \geq N+p. \quad (5)$$

Теорема 1. При $N \geq N_g$ справедлива следующая формула

$$R_N(f) = \sum_{p=0}^{m-1} \Delta_N^p w_1^{-N} \sum_{k=N+p}^{\infty} U_{p+1}(N-1, k) w_1^k \beta_k + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^m w_1^{-n-1} \sum_{k=n+m}^{\infty} U_m(n, k) w_1^k \beta_k. \quad (6)$$

Наметим схему доказательства. Пусть $m = 2$ и в формуле (3) $w = w_1$. Применив снова формулу Абеля соответственно выбору $w = w_2$, (выбрав Δ_n^1 вместо b_n) и изменив порядок суммирования в последней двойной сумме, без труда придем к формуле (6) при $m = 2$. Повторив этот процесс по индукции, добавляя значения w_k ($k = 3, 4, \dots, m$) и учитывая соотношения (4) и (5) придем к формуле (6).

В случае $m = 2$ и $w_2 \neq w_1$ имеем

$$R_N(f) = b_N \rho_N(w_1) + \Delta_N^1 \frac{\rho_N(w_1) - \rho_N(w_2)}{w_1 - w_2} + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^2 \frac{\rho_{n+1}(w_1) - \rho_{n+1}(w_2)}{w_1 - w_2}, \quad (7)$$

где обозначено

$$\rho_n(w) = w^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} w^k \beta_k = w^{-n} (g(w) - \sum_{k=0}^{n-1} w^k g_k \alpha_k), \quad n \geq N_g, \quad |w| < R_g. \quad (8)$$

Если же $w_2 = w_1$, то выражение $(\rho_n(w_1) - \rho_n(w_2))(w_1 - w_2)^{-1}$ надо заменить производной $\rho_n'(w_1)$. Добавляя последовательно значения $w_3, w_4, \dots, w_m$, мы придем к видоизмененной формуле (6), содержащей значения функции $\rho_n(w)$ и (если встречаются величины $w_k = w_p$, $k \neq p$) ее производных в точках $\{w_k\}$. Можно показать, что результат не зависит от нумерации множества $\{w_k\}$. Эти рассуждения одновременно доказывают сходимость всех рядов, фигурирующих в формуле (7).

1.2. Поясним метод аппроксимации, основанный на теореме 1, в простейшем случае $m = 1$. Из (2), (3), (8) легко получить следующую формулу

$$f = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - b_N w_1^{n-N} g_n) \alpha_n + b_N w_1^{-N} g(w_1) + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_n^1 \rho_n(w_1). \quad (9)$$

Пусть $b_N \neq 0$ и $b_{N+1} \neq 0$. Выберем w_1 так, чтобы величина $|\Delta_N^1| = |b_{N+1} - wb_N|$ была возможно малой (если $|b_{N+1}/b_N| < R_g$, то $\Delta_N^1 = 0$, т.е. $w_1 = b_{N+1}/b_N$). Естественно ожидать, что при таком выборе бесконечный ряд в конце формулы (9) будет стремиться к нулю при $N \rightarrow \infty$ быстрее, чем $R_N(f)$ и, отбросив его и учитывая оставшуюся часть, можно рассчитывать получить лучшее приближение к f , чем $S_{N+1}(f)$, используя при этом тот же набор коэффициентов $\{a_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Повторив подобные рассуждения на основе формул (4) и (6), придем к аппроксимационной схеме, основанной на решении линейной алгебраической системы (если оно существует)

$$\Delta_p^m = 0, \quad p = N + 1, N + 2, \dots, N + m, \quad (10)$$

относительно величин

$$\sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_k} \prod_{i=1}^k w_{n_i}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что система $\{w_k\}_{k=1}^m$ определяется отсюда как множество корней (с учетом их кратности) полинома с коэффициентами (11).

Соответственно измененная формула (9) уже будет содержать под знаком бесконечной суммы только сомножители Δ_n^m ($n = N + m + 1, N + m + 2, \dots$), и, отбросив эту сумму, получим приближенное представление функции f с использованием коэффициентов $\{a_0, a_1, \dots, a_{N+2m-1}\}$, $\{g_0, g_1, \dots, g_{N+2m-1}\}$ и линейной комбинации значений производящей функции $g(w)$ на множестве $\{w_k\}$, $k = 1, 2, \dots, m$ (и ее производных, если некоторые точки этого множества совпадают).

Ограничения можно несколько ослабить, потребовав, чтобы система (10) имела вид $\Delta_p^m = 0$, $p = N + 1, \dots, N + p$, $p \geq m$, а задача состояла в минимизации взвешенной среднеквадратичной ошибки на основе псевдообратной матрицы.

На основе ряда в конце формулы (6) можно, поменяв порядок суммирования, использовать ту же схему, но уже для новой производящей функции и нового числа m .

Замечание 1. Приведенная схема применима и в случае "двухстороннего" базиса $\{\alpha_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в B . Именно, в этом случае любой элемент $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \alpha_n$ можно представить в виде

$f = \sum_{n=-N}^N a_n \alpha_n + R_N^+ + R_N^-$, где $R_N^+ = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \alpha_n$, $R_N^- = \sum_{n=-\infty}^{-N} a_n \alpha_n$. Следовательно, по предлагаемой схеме можно использовать две производящие функции $g^\pm(w)$.

Теорема 1 легко обобщается и в случае, когда в (1) и (2) фигурируют операторные (например, матричные) коэффициенты.

2. Схема для интегральных преобразований

2.1. Континуальный аналог вышеприведенного метода также можно рассматривать в банаховом пространстве, но мы остановимся лишь на интегральных преобразованиях функций на полуоси $(0, \infty)$, наметив схему эвристически. Примеры таких преобразований общего вида можно найти, например, в [5,6].

Рассмотрим следующее формальное интегральное преобразование:

$$f(x) = \int_0^{\infty} K(x, \lambda) a(\lambda) d\lambda, \quad (12)$$

определенное для $x \geq 0$. Заданное ядро $K(x, \lambda)$ и функция $a(\lambda)$ комплекснозначные и достаточно гладкие по λ при $\lambda > A_0 > 0$.

Пусть нам известно некоторое преобразование вида (аналогично (1) назовем его производящей функцией)

$$G(x, w) = \int_0^{\infty} K(x, \lambda) e^{-w\lambda} g(\lambda) d\lambda, \quad (13)$$

заданного для $\operatorname{Re}(w) > R_g = \text{const} \geq -\infty$ и удовлетворяющего условию $g(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \geq A_0 = \text{const}$.

Задавшись положительным $A \geq A_0$ и обозначив, аналогично (2), $f = S_N(f) + R_N(f)$, где

$$S_A(f) = \int_0^A K(x, \lambda) a(\lambda) d\lambda, \quad R_A(f) = \int_A^{\infty} K(x, \lambda) a(\lambda) d\lambda, \quad (14)$$

интегрированием по частям получим следующий аналог формулы (3)

$$\begin{aligned} R_A(f) &= h(A) e^{wA} \int_A^{\infty} Q(x, \lambda) e^{-w\lambda} d\lambda + \\ &\int_A^{\infty} (h'(\lambda) + wh(\lambda)) e^{w\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} Q(x, \mu) e^{-w\mu} d\mu d\lambda, \\ x &\geq 0, \operatorname{Re} w > R_g, A \geq A_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где использованы обозначения $h(\lambda) = a(\lambda)/g(\lambda)$, $Q(x, \lambda) = K(x, \lambda)g(\lambda)$.

Для заданного множества комплексных чисел $\{w_k\}$, $\operatorname{Re} w_k > R_g$, $k = 1, 2, \dots, m$ введем следующие величины (аналогичные (4) и (5)):

$$\begin{aligned} \Delta^0(\lambda) &= a(\lambda)/g(\lambda), \\ \Delta^k(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \Delta^{k-1}(\lambda) + w_k \Delta^{k-1}(\lambda), \quad 1 \leq k \leq m. \end{aligned} \quad (16)$$

$$V_1(\lambda, \mu) = 1, \quad V_p(\lambda, \mu) = \int_{\lambda}^{\mu} e^{(w_{p-1} - w_p)t} V_{p-1}(t, \mu) dt, \quad 2 \leq p \leq m \quad (17)$$

Аналог теоремы 1 легко доказывается по индукции, интегрированием по частям.

Теорема 2. При $A \geq A_0$ справедлива формула

$$R_A(f) = \sum_{p=0}^{m-1} \Delta^p(A) e^{w_m A} \int_A^{\infty} Q(x, \mu) e^{-w_1 \mu} V_{p+1}(A, \mu) d\mu + \int_A^{\infty} \Delta^m(\lambda) e^{w_m \lambda} \int_{\lambda}^{\infty} Q(x, \mu) e^{-w_1 \mu} V_m(\lambda, \mu) d\mu d\lambda \quad (18)$$

2.2. Остальные построения континуального случая также аналогичны случаю бесконечных рядов. Так, при $m = 2$ и $w_2 \neq w_1$ из (18) получим

$$R_A(f) = h(A) \rho(x, A, w_1) + \Delta^1(A) \frac{\rho(x, A, w_2) - \rho(x, A, w_1)}{w_1 - w_2} + e^{(w_1 - w_2)A} \int_A^{\infty} \Delta^2(\lambda) \frac{\rho(x, \lambda, w_2) - \rho(x, \lambda, w_1)}{w_1 - w_2} d\lambda, \quad (19)$$

где обозначено

$$\rho(x, \lambda, w) = e^{w\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} Q(x, \mu) e^{-w\mu} d\mu = e^{w\lambda} (G(x, w) - \int_0^{\lambda} K(x, \mu) e^{-w\mu} g(\mu) d\mu). \quad (20)$$

При $w_2 = w_1$ в (19) уже фигурируют производные функции G по w . Соответствующую схему аппроксимации также естественно связать с решением линейной системы с Ганкелевой матрицей

$$\frac{d^p}{dA^p} \Delta^m(A) = 0, \quad p = 0, 1, \dots, m-1, \quad (21)$$

относительно величин (11), что позволяет найти величины $\{w_k\}$, в качестве нулей соответствующего полинома. Естественно рассчитывать на то, что в последнем интеграле формулы (18) функция $\Delta^m(\lambda)$ ($\lambda \geq A$) будет стремиться к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$ достаточно быстро,

чтобы, после отбрасывания этого интеграла и учета оставшейся части $R_A(f)$, соответствующая аппроксимация функции $f(x)$ была лучшей, чем $S_{N+m-1}(f)$.

Практическая реализация может быть основана на замене производных в (21) соответствующими конечными разностями. Как и выше вместо (21) можно использовать соответствующую переопределенную систему. Наконец, исходя из представления (18), можно снова применить ту же схему, но уже на основе другой производящей функции.

В простейшем случае $m = 1$ из (15) и (20) следует приближенная формула

$$f(x) \approx \int_0^A K(x, \lambda) [a(\lambda) - a(A) e^{w_1(A-\lambda)} g(\lambda)/g(A)] d\lambda + h(A) e^{w_1 A} G(x, w_1). \quad (22)$$

Замечание 2. Как и в дискретном случае, для двухсторонних преобразований (т.е. при интегрировании в (12) от $-\infty$ до $+\infty$) нужно иметь две производящие функции $G^\pm(x, w)$, соответствующие положительной и отрицательной полуосям.

3. Заключение

Нетрудно видеть, что в частном случае аналитической в круге $|z| \leq R$ функции $f(z) = \sum a_n z^n$ (базис $\alpha_n = z^n$ определяется равномерной в этом круге метрикой) и производящей функции $g(w) = (1-wz)^{-1}$ ($g_n = 1$, $n = 0, 1, \dots$; $R_g = R^{-1}$) вышеизложенная схема совпадает со схемой классической аппроксимации Паде (см. [1-3]), отличаясь от нее чисто методически. Широкий выбор даже элементарных производящих функций открывает новые возможности.

Известные в случае функциональных рядов обобщения аппроксимации Паде, в основном, относятся к рациональным приближениям и основаны на иных подходах (см. [1-3]). Схема данной работы непосредственно обобщает также метод Бейкера - Гаммеля для аппроксимации функций марковского типа (см. [1]) и "сингулярный метод Фурье - Паде" ([6]), который основан на применении логарифмических производящих функций в случае рядов Фурье. Отметим, что метод матричных (операторных, см. [1]) аппроксимаций Паде также обобщается (см. выше Замечание 1).

Что же касается интегральных преобразований, то предлагаемый метод, по-видимому, совершенно нов, а его эффективность (по крайней мере, в классических случаях) основана на минимизации величины A (см, выше (14)) при заданной точности, что позволяет уменьшать осцилляцию подынтегральных функций, повышая эффективность применения численного интегрирования.

Численная реализация описанных аппроксимаций оказалась вполне эффективной как в случае разложений Фурье и по классическим ортогональным полиномам (с использованием стандартных производящих функций), так и для преобразований Фурье и Ганкеля.

Важно отметить, что и в случае классических функциональных рядов, и в случае важнейших известных интегральных преобразований метод данной работы, как правило, позволяет автоматически (численно) приближенно распознавать сингулярности разлагаемой функции на основе анализа множества $\{w_k\}$. За исключением немногочисленных работ (см., например, [7,8]), эта задача, чрезвычайно важная для приложений, до последнего времени решалась

физически, т.е. сканированием соответствующих графиков (см., например, [9] с библиографией).

В заключение подчеркнем, что, в практическом плане, производящие функции (1) и (13) должны обладать алгоритмом быстрого и точного вычисления (например, выражаться через известные элементарные или специальные функции).

Работа выполнена в рамках проекта ISTC A-823.

Институт математики НАН РА

Литература

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П., Аппроксимации Паде. Мир. Москва. 1986.
2. Lubinsky D. S., Sidi A.- Trans. Amer. Math. Soc. 1983 V. 278. N 1. P. 333-345.
3. Суетин С. П. - Успехи мат. наук. 2002. Т. 57. Вып. 1(343). С. 45-142.
4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М. Мир. 1979.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А.- Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М. Наука. 1974.
6. Driscoll T. A., Fornberg B.- Numerical Algorithms 2001. V. 26. P. 77-92.
7. Eckhoff K. S.- Math. Comput. 1993. V. 61 N 204. P. 745-763.
8. Eckhoff K. S.- Math. Comput. 1995. V. 64 N 210. P. 671-690.
9. Kvernadze G.- Appl. and Comp. Harmonic Analysis. 2001. N 11. P. 439-454.

Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսեսյան

Պադեի ապրոքսիմացիայի մի ընդհանրացման մասին

Առաջարկված է անվերջ շարքերի և ինտեգրալ ձևափոխությունների մոտարկման ընդհանուր եղանակ: Այն հիմնված է ծնորդ ֆունկցիաների օգտագործման վրա: