

УДК 517.53

А. М. Джрбашян

О весовых пространствах целых функций, суммируемых по комплексной плоскости

(Представлено академиком В. С. Захаряном 2/V 2003)

Статья усиливает результаты М. М. Джрбашяна [1] о весовых пространствах целых функций, интегрируемых по площади всей комплексной плоскости. Даны теоремы представления во сколь угодно широких банаховых пространствах целых функций. Полученная явная формула для изометрии между пространством Харди H^2 и рассматриваемыми пространствами позволяет преобразовывать известные в H^2 предложения в такие же предложения во сколь угодно широких гильбертовых пространствах целых функций. Статья является продолжением работы [2].

1. Представления во всей комплексной плоскости.

1.1. Ниже мы будем рассматривать пространства $A_\omega^p(C)$ ($1 \leq p < +\infty$) целых функций $F(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{p,\omega} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_C |F(\zeta)|^p d\mu_\omega(\zeta) \right\}^{1/p} < +\infty,$$

где $d\mu_\omega(\rho e^{i\theta}) = -d\omega(\rho^2)d\theta$, а $\omega \in \Omega_A^\infty$, т.е. функция $\omega(x)$ строго убывает на всей полуоси $[0, +\infty)$ и такова, что $\omega(0) = 1$ и

$$\Delta_n^\infty(\omega) = - \int_0^{+\infty} t^n d\omega(t) < +\infty \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots$$

Через $L_\omega^p(C)$ будем обозначать соответствующие лебеговы пространства.

Лемма 1.1. При любом $p \in [1, +\infty)$ сумма $\bigcup_{\omega \in \Omega_A^\infty} A_\omega^p(C)$ совпадает со множеством всех целых функций.

1.2. Заметив, что при вышеприведенных условиях $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Delta_n^R(\omega)|} = R^2$ при $\Delta_n^R(\omega) = - \int_0^{R^2} t^n |d\omega(t)|$ и любом $R \in (0, +\infty]$, приведем сначала следующую теорему о представлениях.

Теорема 1.1. Пусть $F(z) \in A_{\omega}^2(C)$ ($\omega \in \Omega_A^{\infty}$). Тогда в любой точке $z \in C$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_C F(\zeta) C_{\omega}^{\infty}(z, \bar{\zeta}) d\mu_{\omega}(\zeta) = -\overline{F(0)} + \frac{1}{\pi} \iint_C \{ \operatorname{Re} F(\zeta) \} C_{\omega}^{\infty}(z, \bar{\zeta}) d\mu_{\omega}(\zeta),$$

где $C_{\omega}^{\infty}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Delta_n^{\infty}(\omega)$ - ядро типа Коши из [3].

Замечание 1.1. При $\omega \in \Omega_A^{\infty}$ множество функций

$$e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{\Delta_n^{\infty}(\omega)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

является ортогональным базисом пространства $A_{\omega}^2(C)$. Кроме того, справедлива

Теорема 1.2. Если $\omega \in \Omega_A^{\infty}$, то для ортогональной проекции $L_{\omega}^2(C)$ на $A_{\omega}^2(C)$ верна формула

$$P_{\omega} f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_C f(\zeta) C_{\omega}^{\infty}(z, \bar{\zeta}) d\mu_{\omega}(\zeta), \quad z \in C, \quad f \in L_{\omega}^2(C).$$

1.3. При параметр-функциях $\omega(x)$ определенного типа следующая теорема устанавливает явные представления для действующего между пространством H^2 Харди и $A_{\omega}^2(C)$ изометрического оператора и его обратного.

Теорема 1.3. Пусть функция $\omega \in \Omega_A^{\infty}$ непрерывно дифференцируема в $[0, +\infty)$ и такова, что $\omega(+\infty) = 0$, производная $\omega'(x) < 0$ и ограничена в $[0, +\infty)$, а также

$$-\infty < \int_0^{+\infty} \frac{d\omega(t)}{t} < 0.$$

Тогда функция

$$\tilde{\omega}(x) = - \int_0^{+\infty} \omega\left(\frac{x}{t}\right) d\omega(t), \quad 0 < x < +\infty,$$

принадлежит Ω_A^{∞} , и $A_{\tilde{\omega}}^2(C)$ совпадает со множеством всех функций, представимых в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\vartheta}) C_{\omega}^{\infty}(ze^{-i\vartheta}) d\vartheta, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]. \quad (1.1)$$

Для любого $F(z) \in \mathcal{A}_{\omega}^2(\mathbb{C})$ существует единственная функция $\varphi_0(z) \in H^2$ такая, что (1.1) верно с $\varphi_0(e^{i\vartheta})$. Эта функция задается формулой

$$\varphi_0(z) = L_{\omega}^{\infty} F(z) = - \int_0^{+\infty} F(tz) d\omega(t), \quad |z| < 1.$$

Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2}^2 = \|F\|_{2, \omega}^2$, и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ для любого $\varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$, с которым верно (1.1).

Оператор L_{ω} является изометрией $\mathcal{A}_{\omega}^2(\mathbb{C}) \rightarrow H^2$, и интеграл (1.1) задает $(L_{\omega})^{-1}$ на H^2 .

Замечание 1.2. Пространства $\mathcal{A}_{\omega}^2(\mathbb{C})$, рассматриваемые в теореме 1.3, исчерпывают все целые функции.

1.4. В общем случае $1 \leq p < +\infty$ верна следующая теорема о представлении функций из $\mathcal{A}_{\omega}^p(\mathbb{C})$ интегралом по окружности $|z|=1$.

Теорема 1.4. Пусть $1 \leq p < +\infty$, $\omega(x) \in \Omega_{\mathbb{A}}^{\infty}$ и $\bigvee_0^{\infty} \omega = 1$. Тогда любая функция $F(z) \in \mathcal{A}_{\omega}^p(\mathbb{C})$ представима в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{\omega_1}(ze^{-i\vartheta}) \varphi(e^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad |z| < 1, \quad (1.2)$$

где $\omega_1(x) = \omega(x^2)$, а $\varphi(z) = L_{\omega_1} F(z) \in H^p$. При этом $\|L_{\omega_1}\| \leq 1$ в $\mathcal{A}_{\omega}^p$, и (1.2) задает $L_{\omega_1}^{-1}$ на множестве $L_{\omega_1} \mathcal{A}_{\omega}^p(\mathbb{C})$.

1.4. Особо отметим, что утверждения теоремы 1.3 верны, когда

$$\omega'(x) = -C_0 e^{-\gamma x^p} x^{\mu p - 1} \quad (0 < x < +\infty, \quad \gamma, p, \mu > 0), \quad C_0 = \left[\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x^p} x^{\mu p - 1} dx \right]^{-1},$$

несмотря на то, что в этом случае не выполнены условия на $\tilde{\omega}'(x)$, обеспечивающие включение $\omega(x) \in \Omega_{\mathbb{A}}^{\infty}$ теоремы 1.3. А именно, имеет место следующее усиление теоремы XIV₁ из [1].

Теорема 1.5. Гильбертово пространство целых функций, определенных условием

$$\|F\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\vartheta \int_0^{2\pi} |F(re^{i\vartheta})|^2 e^{-2\gamma r^\rho} r^{2\mu\rho-\rho/2-1} dr \right\}^{1/2} < +\infty, \quad (1.3)$$

где $\gamma, \rho, \mu > 0$ - любые числа, совпадает со множеством всех функций, представимых в виде

$$F(z) = \frac{\rho\gamma^\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_\rho(\gamma^{1/\rho} z e^{-i\vartheta}, \mu) \varphi(e^{-i\vartheta}) d\vartheta, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(e^{-i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi], \quad (1.4)$$

где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$$

- общеизвестная функция типа Миттаг-Леффлера.

Для любого $F(z)$ из пространства (1.3) существует единственная функция $\varphi_0(z) \in H^2$ такая, что (1.4) верно с $\varphi_0(e^{i\vartheta})$. Эта функция задается формулой

$$\varphi_0(z) = \int_0^{+\infty} F(tz) e^{-\gamma t^\rho} t^{\mu\rho-1} dt, \quad |z| < 1.$$

Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2}^2 = \|F\|^2$, и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ для любого $\varphi(e^{-i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$, с которым верно (1.4).

2. Биортогональные системы функций в A_ω^2 .

Установленные в теоремах 1.3 и 1.5 формулы для изометрий между H^2 ($|z| < 1$) и пространствами $A_\omega^2(\mathbb{C})$ предоставляют возможность легко переводить известные в пространстве Харди H^2 факты в аналогичные предложения в $A_\omega^2(\mathbb{C})$.¹ В частности, результаты М. М. Джрбашяна и Г. М. Айрапетяна [4-6] о биортогональных системах функций в H^2 переводятся в аналогичные утверждения для $A_\omega^2(\mathbb{C})$.

Мы будем рассматривать случай простых узлов интерполяции, т.е. будем полагать, что $\{\alpha_j\}_1^\infty$ - последовательность попарно различных чисел в $|z| < 1$, подчиненная условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|) < +\infty. \quad (2.1)$$

Далее, будем полагать, что $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, если последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ равномерно отделена,

т.е.

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j=1, j \neq k} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \alpha_j \alpha_k} \right| = \delta > 0.$$

Введем также произведение Бляшке с нулями в $\{\alpha_j\}_1^\infty$:

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j - z}{1 - \alpha_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}.$$

Полагая, что всюду ниже функции $\tilde{\omega}(x)$ и $\omega(x)$ таковы, как в теореме 1.3 либо в теореме 1.5, для изометрий $H^2 \rightarrow A_{\tilde{\omega}}^2(C)$ этих теорем введем обозначение

$$T_{\omega}^{\infty}(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) C_{\omega}^{\infty}(ze^{i\theta}) d\theta, \quad |z| < 1, \quad (T_{\omega} = (L_{\omega}^{\infty})^{-1}).$$

Тогда хорошо известное неравенство Шапиро - Шилдса [7] запишется в нижеприводимом виде.

Предложение 2.1. Если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$, то для любого $F(z) \in A_{\tilde{\omega}}^2(C)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|^2) |L_{\omega}^{\infty} F(\alpha_j)|^2 \leq C \|F\|_{\tilde{\omega}, 2}^2,$$

где C - постоянная.

Ниже приведем ряд предложений, в основном следуя порядку изложения [6]. Однако сначала обозначим

$$r_k(z) = \frac{1}{1 - \alpha_k z} \quad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{z - \alpha_k}.$$

Далее, отметим следующие формулы для систем целых функций $T_{\omega}^{\infty}(r_k(z)) = r_{k,\omega}^{\infty}(z)$ и $T_{\omega}^{\infty}(\Omega_k(z)) = \Omega_{k,\omega}^{\infty}(z)$ ($k = 1, 2, \dots$):

$$r_{k,\omega}^{\infty}(z) = C_{\omega}^{\infty}(\overline{\alpha_k} z) \quad \text{и} \quad \Omega_{k,\omega}^{\infty}(z) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \rho^n}{\Delta_n(\omega)} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_k^m \rho^{m+1} b_{n+m+1}, \quad (2.2)$$

где b_n - коэффициенты разложения $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ($|z| < 1$).

Предложение 2.2. Если последовательность $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ не подчинена условию Бляшке, т.е. ряд (2.1) расходится, то обе системы (2.2) полны в $A_{\omega}^2(C)$.

Теперь через $\lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$ обозначим множество всех функций $F(z) \in A_{\omega}^2(C)$, для которых граничные значения $L_{\omega}^{\infty} F(z)$ почти всюду на $|z|=1$ совпадают с граничными значениями $\psi(z)/B(1/z)$ для некоторых $\psi(z) \in H^2$, $\psi(0) = 0$.

Предложение 2.3. Функции систем (2.2) принадлежат $\lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$, и системы (2.2) биортогональны в $A_{\omega}^2(C)$, т.е.

$$(r_{k,\omega}^{\infty}, \Omega_{k,\omega}^{\infty})_{\omega} = \iint_C (r_{k,\omega}^{\infty}(\zeta) \overline{\Omega_{k,\omega}^{\infty}(\zeta)}) d\mu_{\omega}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{при } v = k, \\ 0 & \text{при } v \neq k. \end{cases}$$

Предложение 2.4. Пусть $F(z) \in A_{\omega}^2(C)$. Тогда $F(z) \in \lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$ в том и только том случае, когда

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{L_{\omega}^{\infty} F(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 0, \quad z \in C.$$

Предложение 2.5. Любая функция $f(z) \in A_{\omega}^2(C)$ представима в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad \|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2,$$

где $f_1(z) \in \lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$ и

$$f_2(z) = T_{\omega}(B(z)g(z)) \in A_{\omega}^2(C), \quad g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{L_{\omega}^{\infty} f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} \in H^2.$$

Предложение 2.6. Если $\{\alpha_k\}_1^{\infty} \in \Delta$, а последовательность $\{w_k\}_1^{\infty}$ подчинена условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|)|w_k|^2 < +\infty,$$

то существует единственная функция $F(z) \in \lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$ такая, что

$$L_{\omega}^{\infty} F(\alpha_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Эта функция представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_{k,\omega}^{\infty}(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где ряд сходится по норме A_{ω}^2 . Функция же $F(z)$ - решение интерполяционной задачи (2.3) с минимальной нормой.

Предложение 2.7. Множества $\{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2} r_{k,\omega}^{\infty}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{(1-|\alpha_k|^2)^{-1/2} \Omega_{k,\omega}^{\infty}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ являются безусловными базисами в $\lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$ в том и только том случае, когда $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Delta$.

Предложение 2.8. Если $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Delta$, то любая функция $F(z) \in \lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$ допускает разложения

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(F) r_{k,\omega}^{\infty}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} L_{\omega}^{\infty} F(\alpha_k) \Omega_{k,\omega}^{\infty}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_k(F) = (F, \Omega_{k,\omega}^{\infty})_{\tilde{\omega}},$$

сходящиеся по норме в $A_{\tilde{\omega}}^2(\mathbb{C})$.

Замечание. Рассмотренные выше биортогональные системы качественно разнятся от тех, которые были рассмотрены А. Ф. Леонтьевым [8].

Институт математики НАН РА

Литература

1. Джрбашян М. М.- Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР. 1948. Т. 2. С. 3 - 40.
2. Джрбашян А. М., Аветисян К. Л.- ДНАН Армении. 2002. Т. 102. № 2. С. 105 - 112.
3. Джрбашян М. М.- Изв. АН АрмССР. Математика. 1970. Т. 5. № 6. С. 453 - 485.
4. Джрбашян М. М.- Изв. АН АрмССР. Математика. 1973. Т. 8. № 5. С. 384 - 409.
5. Джрбашян М. М.- Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1974. Т. 9. № 5. С. 339 - 373.

6. Айрапетян Г. М.- Изв. АН АрмССР. Математика. 1975. Т. 10. № 2. С. 133 - 152.
7. Shapiro H., Shields A.- Amer. J. Math. 1961. V. 83. P. 513 - 532.
8. Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент. М. Наука. 1981.

Footnotes:

¹Следует отметить, что то же самое верно в отношении рассмотренных в теореме 1.2 из [2] изометрий между H^2 и пространствами A_{ω}^2 в $|z| < 1$.

Ա. Մ. Ջրբաշյան

Կոմպլեքս հարթության մակերեսով հանրագումարելի ամբողջ ֆունկցիաների կշռային տարածությունների մասին

Հոդվածն ուժեղացնում է կոմպլեքս հարթության մակերեսով ինտեգրելի ամբողջ ֆունկցիաների տարածություններին վերաբերող Ա. Մ. Ջրբաշյանի [1] արդյունքները: Ստացված են ներկայացման թեորեմներ ամբողջ ֆունկցիաների կամայապես լայն բանախյան տարածությունների համար: Գնտված է բանաձև Հարդիի H^2 տարածության ուղիտարկված տարածությունների միջև գործող իզոմետրիայի համար, որը թույլ է տալիս ձևափոխել H^2 -ում հայտնի արդյունքները նմանատիպ պնդումների ամբողջ ֆունկցիաների կամայապես լայն հիլբերտյան տարածություններում: Հոդվածը [2] աշխատանքի շարունակությունն է: