

УДК 517.55

А. И. Петросян

О весовых классах голоморфных функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$

(Представлено академиком В. С. Захаряном 22/IV 2003)

1. В работе анонсируются основные результаты общей теории пространств A_ω^p в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Рассматриваемые весовые пространства A_ω^p голоморфных в единичном шаре функций сколь угодно широки, ибо зависят от функции-параметра $\omega(x)$ ($0 \leq x < 1$) со сколь угодно быстрым убыванием при $x \rightarrow 1 - 0$.

Приводимые теоремы являются многомерными ω -аналогами результатов М.М. Джрбашяна 1945-1948гг., положивших начало теории пространств A_α^p (изначальное обозначение $H^p(\alpha)$) в единичном круге [1], [2].

Примененный аналитический аппарат позволяет распространить на случай единичного шара одномерную общую теорию, построенную в [3] (см. также [4]). В работе приведены первые, основные результаты, полученные этим путем.

Следует отметить, что сама теория пространств $H^p(\alpha)$ М.М. Джрбашяна, относящаяся к частному случаю $\omega(x) = (1 - x)^{1+\alpha}$ ($\alpha > -1$), на случай единичного шара была распространена ранее (см. [5]). Подробнее о недоразумениях, приведших в [5] и других публикациях западных авторов к отсутствию надлежащих ссылок на основополагающие работы М.М. Джрбашяна [1,2] см. в [3].

2. Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ - открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$;

$S_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ - его граница, являющаяся единичной сферой в $\mathbb{C}^n$;

Всюду ниже число n фиксировано, поэтому мы будем писать просто B и S вместо B_n и S_n .

ν - мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированная условием $\nu(B) = 1$;

σ - борелевская мера на S , инвариантная относительно унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющая условию $\sigma(S) = 1$.

Через $\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$ будем обозначать скалярное произведение для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$, а через $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ - соответствующую норму.

С каждым мультииндексом $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, где

$$\mathbf{Z}_+^n = \{s \in \mathbf{Z}^n : s_k \geq 0\},$$

будем связывать: два числа $s! = \prod_{k=1}^n s_k!$ и $|s| = \sum_{k=1}^n s_k$,

оператор дифференцирования $D^s = [(\partial^{|s|})/(\partial z_1^{s_1} \dots \partial z_n^{s_n})]$,

и голоморфный моном $z^s = \prod_{k=1}^n z_k^{s_k}$.

Далее, через Ω будем обозначать множество параметр-функций $\omega(t)$, определенных на интервале $[0,1]$ и удовлетворяющих там условиям

(i) $0 < \bigvee_{\delta}^{1-\delta} \omega < \infty$ для любого $\delta \in [0,1]$;

(ii) $\Delta_m \equiv \Delta_m(\omega) = -\int_0^1 t^m d\omega(t) \neq 0, \infty, \quad m = 0,1,\dots;$

(iii) $\lim_{m \rightarrow \infty} m \sqrt[m]{|\Delta_m|} \geq 1$.

Для удобства всюду ниже будем полагать, что $\omega(1) = \omega(1-0)$.

3. Для заданного $\omega \in \Omega$ введем в рассмотрение ядро-функцию

$$C_{\omega,n}(z,w) = C_{\omega}(z,w) = \sum_{s \in \mathbf{Z}_+^n} \frac{(n-1+|s|)!}{(n-1)!s!} \frac{z^s \overline{w}^s}{\Delta_{|s|}}. \quad (1)$$

Предложение 1. При фиксированной точке $w \in \overline{\mathbf{B}}$ функция $C_{\omega}(z,w)$ голоморфна в шаре $\mathbf{B}$.

Предложение 2. Имеет место равенство

$$C_{\omega}(z,w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_m} \frac{(n-1+m)!}{(n-1)!m!} \langle z,w \rangle^m, \quad z \in \mathbf{B}, \quad w \in \overline{\mathbf{B}}.$$

Тем самым, ядро C_{ω} зависит лишь от скалярного произведения $\langle z,w \rangle$.

4. Для каждой функции $\omega \in \Omega$ определим ассоциированную с ней меру

$$d\mu_{\omega}(w) = -d\omega(r^2) d\sigma(\zeta),$$

где $w = r\zeta$ - полярная форма точки $w \in \mathbf{B}$, (т. е. $\zeta \in S$, $0 \leq r \leq 1$).

Обозначим через $L_{\omega}^p = L_{\omega}^p(\mathbf{B})$ класс функций, измеримых по мере $d\mu_{\omega}$ в шаре $\mathbf{B}$, для которых

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{ \int_{\mathbf{B}} |f(w)|^p |d\mu_{\omega}(w)| \right\}^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < \infty, \quad (2)$$

а через $A_{\omega}^p = A_{\omega}^p(\mathbf{B})$ - подмножество L_{ω}^p , состоящее из функций, голоморфных в $\mathbf{B}$. Как известно, при $1 \leq p < \infty$ величина $\|f\|_{p,\omega}$ определяет норму в L_{ω}^p , в которой L_{ω}^p является банаховым пространством, а при $0 < p < 1$ L_{ω}^p является полным метрическим пространством в метрике $\rho(f,g) = \|f - g\|_{p,\omega}^p$.

Имеет место следующее

Предложение 3. Пусть $0 < p < \infty$, K - компакт, лежащий внутри $\mathbf{B}$. Тогда существует константа $C \equiv C(K,s,p,\omega)$ такая, что

$$\max_{z \in K} |D^s f(z)| \leq C \|f\|_{p,\omega} \quad (3)$$

для всех $f \in L_{\omega}^p$ и всех $s \in \mathbf{Z}_+^n$.

Пусть $\|f_n - f\|_{p,\omega} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторых $f_n \in A_{\omega}^p$, $f \in L_{\omega}^p$. Из (3) следует, что существует голоморфная в $\mathbf{B}$ функция $h(z)$, такая, что $f_n(z) \rightarrow h(z)$ равномерно внутри $\mathbf{B}$. Нетрудно показать, что $f = h$. Тем самым справедливо

Предложение 4. Для каждого $0 < p < \infty$ подпространство A_{ω}^p замкнуто в $L_{\omega}^p(\mathbf{B})$.

Следствие. При $1 \leq p < \infty$ класс A_{ω}^p является банаховым пространством, а при $0 < p < 1$ - полным метрическим пространством.

Для произвольной функции f , определенной в $\mathbf{B}$ и $0 < q < 1$, обозначим через f_q ее - растяжение, т. е. функцию, определенную при $|z| < 1/q$ следующим образом: $f_q(z) = f(qz)$. В следующем предложении утверждается непрерывность q -растяжения в пространстве A_{ω}^p .

Предложение 5. Если $f \in A_{\omega}^p$, то $\|f_q - f\|_{p,\omega} \rightarrow 0$ при $q \rightarrow 1 - 0$.

Следствие. Голоморфные полиномы плотны в A_{ω}^p .

Имеет место основная

Теорема 1. Пусть $f \in A_{\omega}^p$. Тогда

$$f(z) = \int_{\mathbf{B}} f(w) C_{\omega}(z, w) d\mu_{\omega}(w), \quad z \in \mathbf{B} \quad (4)$$

$$f(z) = -\overline{f(0)} + 2 \int_{\mathbf{B}} \{\operatorname{Re} f(w)\} C_{\omega}(z, w) d\mu_{\omega}(w), \quad z \in \mathbf{B}. \quad (5)$$

Отметим один частный случай формулы (4). Пусть

$$\omega(x) = n \int_x^1 t^{n-1} (1-t)^{\alpha} dt, \quad (\alpha > -1).$$

Тогда

$$\Delta_m = -n \int_0^1 x^m d\omega(x) = n \int_0^1 x^{n+m-1} (1-x)^{\alpha} dx = \frac{n\Gamma(n+m)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+m+1+\alpha)}.$$

Тем самым ввиду предложения 2 и формулы биномиального разложения

$$\begin{aligned} C_{\omega}(z, w) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} \frac{\langle z, w \rangle^m}{\Delta_m} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m+1)} \frac{\Gamma(n+m+1+\alpha)}{n\Gamma(n+m)\Gamma(1+\alpha)} \langle z, w \rangle^m = \\ &= \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m+1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(m+1)} \langle z, w \rangle^m = \\ &= \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Далее, если $w = r\zeta$, где $|\zeta| = 1$, то, используя выражение для элемента нормированного объема dv в полярных координатах [5], получим

$$d\mu_{\omega}(w) = -d\omega(r^2) d\sigma(\zeta) = 2nr^{2n-1}(1-r^2)^{\alpha} dr d\sigma(\zeta) = (1-r^2)^{\alpha} dv(w). \quad (6)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае формула (4) принимает вид

$$f(z) = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)} \int_{\mathbf{B}} f(w) \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}} dv(w).$$

Эту формулу можно найти в [5]. В одномерном же случае $n = 1$ она впервые была получена в работе М. М. Джрбашяна [1].

Ядро $C_\omega(z, w)$ порождает оператор ортогонального проектирования из L_ω^2 на подпространство A_ω^2 . А именно, имеет место следующая

Теорема 2. Пусть

$$P_\omega f(z) = \int_{\mathbf{B}} f(w) C_\omega(z, w) d\mu_\omega(w), \quad z \in \mathbf{B},$$

где $f \in L_\omega^2$. Тогда P_ω является ортогональным проектором из L_ω^2 на A_ω^2 .

5. Ниже приведено интегральное представление функций из A_ω^2 по границе $\mathbf{B}$, в случае, когда ω является квадратом Вольтерра от другой функции $\tilde{\omega} \in \Omega$. Затем найден некий изометрический оператор, переводящий A_ω^2 в обычное пространство Харди в $\mathbf{B}$, который вместе со своим обратным оператором записывается в явном, интегральном виде. Однако сначала следует отметить, что верно

Предложение 6. Пусть непрерывно дифференцируемая на $[0, 1)$ функция $\tilde{\omega} \in \Omega$ такова, что $\tilde{\omega}(t) \searrow$, $\tilde{\omega}(1) = 0$, $\tilde{\omega}(0) = 1$. Далее, пусть ω является квадратом $\tilde{\omega}$ в смысле Вольтерра, т. е.

$$\omega(x) = \int_x^1 \tilde{\omega}\left(\frac{x}{\sigma}\right) d\tilde{\omega}(\sigma), \quad 0 < x < 1.$$

Тогда $\omega \in \Omega$ и, кроме того,

$$\Delta_m(\omega) = \left[\Delta_m(\tilde{\omega}) \right]^2, \quad m \geq 0. \quad (7)$$

Теорема 3. Если функция f принадлежит A_ω^2 , то функция

$$\varphi_0(z) = L_{\tilde{\omega}} f(z) = - \int_0^1 f(tz) d\tilde{\omega}(t)$$

принадлежит пространству Харди H^2 в единичном шаре. При этом

$$f(z) = \int_S \varphi_0(\zeta) C_{\tilde{\omega}}(z, \zeta) d\sigma(\zeta).$$

Кроме того,

$$\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{2, \omega}. \quad (8)$$

Отметим, что в случае, когда $\omega(x) = n \int_x^1 t^{n-1} (1-t)^\alpha dt$ ($\alpha > -1$), соответствующее пространство A_ω^p , следуя [2], будем обозначать через $H^p(\alpha)$. Ввиду (6) условие (2) записывается в виде

$$\|f\|_{H^p(\alpha)} = \left\{ \int_B (1-|w|^2)^\alpha |f(w)|^p dv(w) \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Если в теореме 3 взять

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{\Gamma(n + \frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \int_x^1 t^{n-1} (1-t)^{[(\alpha-1)/2]} dt,$$

то $A_\omega^2 = H^2(\alpha)$. Поэтому из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу $H^2(\alpha)$, ($\alpha > -1$). Тогда функция

$$\varphi_0(z) = \frac{\Gamma(n + \frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \int_0^1 f(tz) t^{n-1} (1-t)^{[(\alpha-1)/2]} dt$$

принадлежит $H^2(B)$ и имеет место интегральное представление

$$f(z) = \int_S \frac{\varphi_0(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(1-\langle z, \zeta \rangle)^{n+[(\alpha+1)/2]}}.$$

Теорема 4 является многомерным аналогом теоремы V из [2], при $\alpha = 0$ установленной М. В.

Келдышем.

Введем в рассмотрение оператор

$$K_{\tilde{\omega}} \varphi(z) = \int_S \varphi(\zeta) C_{\tilde{\omega}}(z, \zeta) d\sigma(\zeta).$$

Теорема 5. *Функции класса $A_{\tilde{\omega}}^2$ представимы в виде*

$$f(z) = K_{\tilde{\omega}} \varphi(z),$$

где φ - произвольная функция из $L^2(S)$.

Следующая теорема, относящаяся к свойствам оператора $K_{\tilde{\omega}}$, дополняет утверждения теорем 3 и 5.

Теорема 6. *Оператор $K_{\tilde{\omega}}$ обладает следующими свойствами:*

1° $K_{\tilde{\omega}}$ является линейным ограниченным оператором с областью определения $L^2(S)$ и областью значений $A_{\tilde{\omega}}^2(B)$.

2° Сужение $K_{\tilde{\omega}}$ на $H^2(S)$ является изометрией между $H^2(S)$ и $A_{\tilde{\omega}}^2(B)$, при этом обратным оператором этой изометрии является $L_{\tilde{\omega}}$.

3° Ядром $K_{\tilde{\omega}}$ служит ортогональное дополнение к $H^2(S)$, т. е.

$$\text{Ker } K_{\tilde{\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in L^2(S): K_{\tilde{\omega}} \varphi = 0\} = H_{\perp}^2(S),$$

где $H_{\perp}^2(S) \oplus H^2(S) = L^2(S)$.

4° $\|K_{\tilde{\omega}}\| = 1$, а точнее $\|K_{\tilde{\omega}} \varphi\|_{A_{\tilde{\omega}}^2(B)} \leq \|\varphi\|_{L^2(S)}$, где знак равенства имеет место в том и только в том случае, если $\varphi \in H^2(S)$.

5° φ_0 минимизирует $\|\varphi\|_{L^2(S)}$ на множестве всех функций φ , для которых $K_{\tilde{\omega}} \varphi = K_{\tilde{\omega}} \varphi_0$.
Иными словами

$$\|\varphi_0\|_{L^2(S)} = \min_{\varphi_1 \in H_{\perp}^2} \|\varphi_0 + \varphi_1\|_{L^2(S)}.$$

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Джрбашян М. М.* - ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. N I. С. 3-9.
2. *Джрбашян М. М.* - Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР. 1948. Т. 2. С. 3-40.
3. *Jerbashian A.M.* - Preprint 2002-01. December 12. 2002. Institute of Mathematics. NAS of Armenia.
4. *Джрбашян А. М., Аветисян К. Л.* ДНАН Армении. 2002. Т. 102. N 2. С. 105-112.
5. *W. Rudin* Function theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag. N. Y. 1980. Рус. пер: У. Рудин. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М. Мир. 1984. 445 с.

Ա. Ի. Պետրոսյան

C^n - ի միավոր գնդում հոլոմորֆ ֆունկցիաների կշռային դասերի վերաբերյալ

Հոդվածում բերված են A_ω^p դասերի ընդհանուր տեսության հիմնական արդյունքները C^n բազմաչափ տարածության միավոր գնդում: Միավոր գնդում հոլոմորֆ ֆունկցիաների դիտարկված A_ω^p կշռային տարածությունները կամայապես լայն են, քանզի կախված են $\omega(x)$ ($0 \leq x < 1$) ֆունկցիա-պարամետրից, որը կարող է կամայական արագությամբ նվազել երբ $x \rightarrow 1$:

Բերված թեորեմները Մ. Մ. Ջրբաշյանի 1945-1948թթ. այն արդյունքների բազմաչափ ω -համանմաններն են, որոնք սկզբնավորել են A_ω^p (սկզբնական նշանակումով $H^p(\alpha)$) դասերի տեսությունը միավոր շրջանում:

Կիրառված անալիտիկ ապարատը թույլ է տվել միավոր գնդի վրա տարածել [3]-ում (տես նաև [4]) կիրառված միաչափ ընդհանուր տեսությունը, ու հոդվածը պարունակում է ստացված առաջին, հիմնական արդյունքները: