

УДК 517.547

А. О. Карапетян

Весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления в матричном круге

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 3/VII 2002)

Пусть $m, n \geq 1$ - произвольные натуральные числа. Обозначим через M_{mn} пространство всех комплексных $m \times n$ - матриц. Для произвольной матрицы $\zeta \in M_{mn}$ через $\zeta^* \in M_{nm}$ обозначается эрмитово сопряженная к ζ матрица. Далее, $I^m (m \geq 1)$ - единичная $m \times m$ - матрица из M_{mm} . Лебегова мера в M_{mn} вводится естественным образом:

$$d\mu_{mn}(\zeta) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n dm(\zeta_{kj}), \quad \zeta = (\zeta_{kj})_{1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Матричным единичным кругом называется область $R_{mn} = \{\zeta \in M_{mn} : I^m - \zeta \cdot \zeta^* \text{ положительно определена}\}$.

При $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ пространство $H_{\alpha}^p(R_{mn})$ определяется как множество всех голоморфных функций $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{mn}$, удовлетворяющих условию

$$\int_{R_{mn}} |f(\zeta)|^p \cdot [\det(I^m - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha} d\mu_{mn}(\zeta) < +\infty.$$

Заметим, что при $m = 1$, $n \geq 1$ R_{mn} есть единичный шар $B_n \subset \mathbb{C}^n$, а пространство $H_{\alpha}^p(R_{mn}) \equiv H_{\alpha}^p$

(B_n) задается условием $\int_{B_n} |f(\zeta)|^p \cdot (1 - |\zeta|^2)^{\alpha} d\mu_{1n}(\zeta) < +\infty$. При $m = n = 1$, т.е. в случае единичного круга

$D \subset \mathbb{C}$, эти пространства были введены в [1,2], где была установлена формула

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \cdot \int \int_{\mathbf{D}} \frac{f(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z \cdot \bar{\zeta})^{2+\alpha}} d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbf{D}, \quad \forall f \in H_\alpha^p(\mathbf{D}). \quad (1)$$

Это представление нашло многочисленные применения в теории факторизации мероморфных функций и других вопросах комплексного анализа. Позднее аналогичные весовые формулы начали представлять интерес и в случае различных многомерных областей.

Так, в [3] был установлен следующий аналог формулы (1) для функций $f \in H_\alpha^p(R_{mn})$ при $\alpha = 0$:

$$f(z) = \text{const} \cdot \int_{R_{mn}} \frac{f(\zeta) d\mu_{mn}(\zeta)}{[\det(I^m - z \cdot \zeta^*)]^{m+n}}, \quad z \in R_{mn}. \quad (2)$$

Позже, в случае шара $\mathbf{B}_n$, было установлено интегральное представление

$$f(z) = \text{const} \cdot \int_{\mathbf{B}_n} \frac{f(\zeta) \cdot (1-|\zeta|^2)^\beta}{[1 - \langle z, \zeta \rangle]^{n+1+\beta}} d\mu_{1n}(\zeta), \quad z \in \mathbf{B}_n, \quad (3)$$

для функций $f \in H_\alpha^p(\mathbf{B}_n)$ (см. [4] при $\alpha = 0$, [5,6] при $\alpha > -1$) и при условии

$$\text{Re } \beta \geq \alpha, \text{ если } p = 1, \text{ Re } \beta > \frac{\alpha+1}{p} - 1, \text{ если } 1 < p < \infty. \quad (4)$$

В [7,8] эти результаты были обобщены (формула (2) - в смысле веса, а формула (3) - в смысле области). Точнее, если $f \in H_\alpha^p(R_{mn})$, то

$$f(z) = c_{mn}(\beta) \cdot \int_{R_{mn}} \frac{f(\zeta) \cdot [\det(I^m - z \cdot \zeta^*)]^\beta}{[\det(I^m - z \cdot \zeta^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\zeta), \quad z \in R_{mn} \quad (5)$$

где β удовлетворяет условию (4) и

$$c_{mn}(\beta) = \frac{1}{\pi^{mn}} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{m+n} \Gamma(\beta + 1)}{\prod_{k=1}^m \Gamma(\beta + k) \cdot \prod_{j=1}^n \Gamma(\beta + j)}.$$

Постепенно начало выясняться, что подобные интегральные представления являются полезным инструментом в вопросах весовых решений $\bar{\partial}$ -уравнения. В этой связи возникла необходимость установления аналогов вышеприведенных формул уже для гладких (скажем, класса C^1), а не только голоморфных функций. В [9] для функций $f \in C^1(\overline{B_n})$ была установлена следующая формула ($\text{Re}\beta > -1$):

$$\begin{aligned} f(z) = c_{1n}(\beta) \cdot \int_{B_n} \frac{f(\zeta) \cdot (1 - |\zeta|^2)^\beta}{1 - \langle z, \zeta \rangle} d\mu_{1n}(\zeta) - c_{1n}(\beta) \cdot \int_{B_n} \frac{\langle \bar{\partial} f(\zeta), \zeta - z \rangle}{[D(z, \zeta)]^n} \cdot \\ \cdot (1 - \langle \zeta, z \rangle)^{n-1} \cdot \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \langle z, \zeta \rangle} \right)^{\beta+1} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p \cdot C_{n-1}^p}{p + \beta + 1} \cdot \\ \cdot \left[\frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^2} \right]^p d\mu_{1n}(\zeta), \quad z \in B_n, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\langle \bar{\partial} f(\zeta), \zeta - z \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} \cdot (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k),$$

$$D(z, \zeta) = |1 - \langle z, \zeta \rangle|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2).$$

В настоящей заметке приводится аналог формулы (6) для области R_{mn} и, тем самым, одновременно обобщается (5) на случай гладких функций.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем некоторые обозначения.

При $z \in R_{mn}$

$$\varphi_z(\zeta) = \sqrt{I^m - zz^*} \cdot (I^m - \zeta z^*)^{-1} \cdot (z - \zeta) \cdot \sqrt{I^n - z^* z}^{-1}, \quad \zeta \in \overline{R}_{mn},$$

обозначает дробно-рациональный автоморфизм области R_{mn} .

Для произвольной матрицы $A \in M_{mn}$ $\|A\|$ обозначает "матричную норму", т.е. $\|A\|^2$ есть максимальное собственное значение матрицы $A \cdot A^*$.

Теорема. Пусть $m, n \geq 1$ и $\operatorname{Re} \beta > -[1/m]$, тогда каждая функция $f \in C^1(\overline{R}_{mn})$ допускает представление вида

$$f(z) = c_{mn}(\beta) \cdot \int_{R_{mn}} \frac{f(\zeta) \cdot [\det(I^m - z\zeta^*)]^\beta}{[\det(I^m - \zeta\zeta^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\zeta) -$$

$$- c_{mn}(\beta) \cdot \int_{R_{mn}} \langle \bar{\partial} f(\zeta), (I^m - \zeta z^*)(I^m - z\zeta^*)^{-1}(\zeta - z) \rangle \cdot \Phi(z, \zeta) d\mu_{mn}(\zeta), \quad z \in R_{mn}, \quad (7)$$

где

$$\Phi(z, \zeta) = \left[\frac{\det(I^m - \zeta z^*)}{\det(I^m - z\zeta^*)} \right]^\beta \cdot \frac{1}{[\det(I^m - z\zeta^*)]^{m+n}} \cdot$$

$$\int_1^{1/\|\varphi_z(\zeta)\|^2} t^{mn-1} \cdot \left[\det(I^m - t \cdot \varphi_z(\zeta) \cdot \varphi_z(\zeta))^* \right]^\beta dt, \quad z \neq \zeta, \quad z, \zeta \in R_{mn}.$$

При этом справедлива оценка вида

$$|\Phi(z, \zeta)| \leq \operatorname{const} \cdot \|\zeta - z\|^{-2mn}$$

равномерно по $\zeta \in R_{mn}$, $z \in K \subset \subset R_{mn}$

Институт математики НАН РА

Литература

1. Джрбашян М. М. - ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. N I. С. 3-9.
2. Джрбашян М. М. - Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-40.
3. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М. ИЛ. 1959.

4. *Forelli F., Rudin W.* - Ind. Univ. Math. J. 1974. V. 24. N6. P. 593-602.
5. *Джрбашян М. М.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т. 23. N 6. С. 517-545.
6. *Dzhrbashian M. M.* - Математически Вестник. 1987. V. 39. P. 263-282.
7. *Джрбашян М. М., Карапетян А. О.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1989. Т.24. N6. С. 523-546.
8. *Джрбашян М. М., Карапетян А. О.* - ДАН СССР. 1990. Т. 312. N 1. С. 24-27.
9. *Charpentier Ph.* - Ann. Inst. Fourier. 1980. V. 30. N4. P. 121.-154.

Ա. Հ. Կարապետյան

Կշռային $\bar{\partial}$ -ինտեգրալ ներկայացումներ մատրիցային շրջանում

Հոդվածում $R_{mn} = \{\zeta \in M_{mn} : I^m - \zeta \cdot \zeta^* > 0\}$ մատրիցային տիրույթի փակույթում տրված C^1 դասի f ֆունկցիաների համար ստացված են

$$f = P(f) - T(\bar{\partial}f)$$

տեսքի ինտեգրալ ներկայացումներ, որտեղ P - ն $L^2[R_{mn}; [det(I^m - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\zeta)]$ տարածությունում օրթոգոնալ պրոյեկտոր է հոլոմորֆ ֆունկցիաների ենթատարածության վրա, իսկ T ինտեգրալ օպերատորը տրված է բացահայտորեն գրված և գնահատված կորիզով: