

УДК 539.1

Член-корреспондент НАН РА А.Г.Багдоев, Ю.С.Сафарян, Г.А.Мартirosян

Нелинейная нестационарная пространственная задача дифракции электромагнитной волны при ее произвольной поляризации

(Представлено 22/VII 2002)

Рассматривается задача о прохождении плоской электромагнитной волны около непрозрачного экрана в форме угла раствора $[(3\pi)/2]$ в нелинейной среде. Ставится задача определения линейного и нелинейного решения в окрестности линий касания плоской отраженной волны S с цилиндрическими волнами K и Π , произведенными краями экрана (рисунок), а затем и решений в полной окрестности точки B касания указанных волн со сферической волной σ , произведенной вершиной O . Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \bar{H} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \varepsilon \bar{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{E} = 0,$$

в последнем уравнении нелинейностью пренебрегаем, и для малых $\bar{E}$ можно считать

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{1}{C_0^2} \delta_2 E - \frac{2}{3C_0^2} \delta_3 E^2, \quad \frac{1}{C_0^2} = \frac{\varepsilon_0}{C^2}, \quad (1)$$

C - скорость света вне нелинейной среды, $E^2 = E_y^2 + E_z^2$.

Предположим, что падающая волна линейно поляризована, оси y, z направлены по краям экрана, ось x перпендикулярна к ним и к плоскости падающей и плоской отраженной волны, электрическое поле на начальной волне имеет компоненты $E_y^0 = A$, $E_z^0 = B$. Уравнения

Максвелла дают

$$\frac{\partial^2 E_{y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{y,z}}{\partial z^2} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left(1 - \delta_2 E - \frac{2}{3} \delta_3 E^2 \right) E_{y,z} \right\}. \quad (2)$$

В дальнейшем будет рассмотрена кубическая среда $\delta_2 = 0$. Линейная задача соответствует уравнению (2) в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad u = E_{y,z}. \quad (3)$$

Таким образом, линейная задача распадается на задачи определения: $u = E_y$ при начальном условии в плоскости y, z вне экрана $E_y = A$; $u = E_z$ при условии $E_z = B$. Ищем решение в указанной выше окрестности точки В касания цилиндрических, плоских и сферических волн. При решении задачи о начальных условиях, заданных позади падающей волны, для уравнения (3) следует записать [1]

$$u = tMc_0t(\Phi_1) + \frac{\partial tMc_0t(\Phi_0)}{\partial t}, \quad (4)$$

где $Mc_0t(\Phi)$ есть поделенный на $4\pi C_0^2 t^2$ интеграл от Φ , взятый по поверхности сферы радиуса $C_0 t$ с центром в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, в которой определяется решение, Φ_0, Φ_1 есть значения $u, [(\partial u)/(\partial t)]$ позади начальной волны S_0 . При определении решения в точке М, находящейся вблизи волны S, а также вблизи точки В, следует интегрировать по поверхности указанной сферы, отсекаемой S_0 . Уравнение сферы имеет следующий вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = C_0^2 t^2;$$

для малых x и $C_0 t - x_0 = C_0 \delta$

$$x = -C_0 \delta + \frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{2C_0 t}.$$

Уравнение S_0 относительно сферы имеет вид

$$z' = 0, \quad z' = C_0 \delta - \frac{(y - y_0)^2}{2C_0 t} - \frac{(z - z_0)^2}{2C_0 t}, \quad (5)$$

где $z' = -x$, x есть координата точки интегрирования позади начальной волны.

Начальные условия, например, для E_z , имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= \Phi_0 = B\sigma(z')\sigma(y)\sigma(z), \\ \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} &= \Phi_1 = B\delta(z')\sigma(y)\sigma(z), \end{aligned} \quad (6)$$

где $B = \text{const}$, $\sigma(z')$ есть единичная функция, $\delta(z)$ есть дельта-функция и выбор условий (6) обусловлен теорией Кирхгоффа [2] о необходимости интегрировать по освещенной части

начальной волны S_0 и плоскости $x = 0$ вне экрана. Таким образом, на область интегрирования накладываются следующие условия:

$$z' \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \quad (7)$$

Из (4), (6) имеем

$$u = \frac{1}{2\pi C_0 t} \int \int B\delta(z') dy dz, \quad (8)$$

где область интегрирования дается в (7).

Введя переменные ξ, η , причем,

$$\lambda = \sqrt{2C_0^2 t}, \quad y - y_0 = \lambda \sqrt{\delta} \xi, \quad z - z_0 = \lambda \sqrt{\delta} \eta, \quad (9)$$

для области интегрирования в (8) можно записать

$$1 - \xi^2 - \eta^2 \geq 0, \quad \xi \geq -\frac{y_0}{\lambda \sqrt{\delta}}, \quad \eta \geq -\frac{z_0}{\lambda \sqrt{\delta}}. \quad (10)$$

Область интегрирования меняется в зависимости от расположения точки (x_0, y_0, z_0)

$$1. \quad -\frac{y_0}{\lambda \sqrt{\delta}} < -1, \quad -\frac{z_0}{\lambda \sqrt{\delta}} < -1 \quad (11)$$

Обозначая $\delta_0 = t - t_g$, где $\delta_0 = 0$ есть уравнение волны σ , причем

$t_g = [\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}] / (C_0)$, и учитывая, что при $t = t_g$ в (5) $y = 0, z = 0, z' = c_0 \delta_0$, можно получить уравнение S относительно σ

$$\delta = \delta_0 + \frac{1}{2C_0^2 t} y_0^2 + \frac{1}{2C_0^2 t} z_0^2, \quad \delta = 0 \quad (12)$$

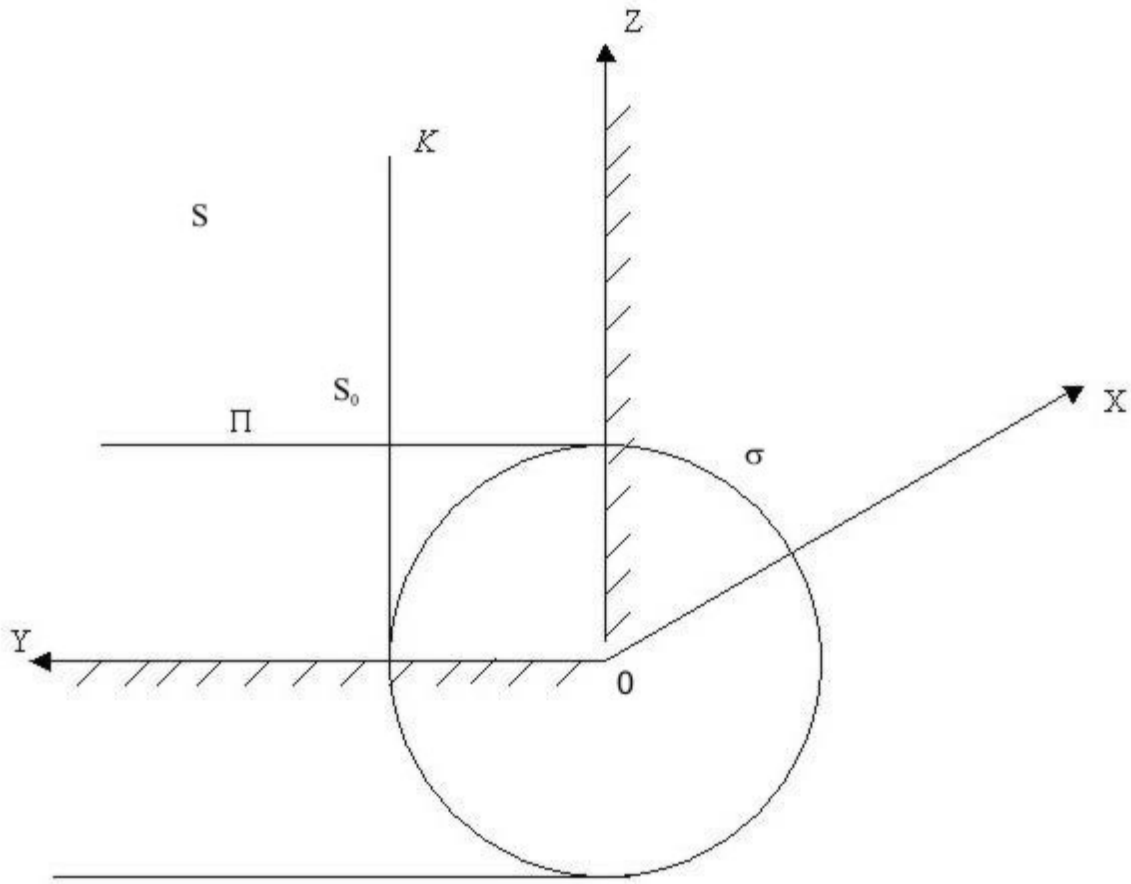
Кроме того, если ввести переменные величины

$$K_1 = \delta_0 + \frac{1}{\lambda^2} z_0^2, \quad \Pi_1 = \delta_0 + \frac{1}{\lambda^2} y_0^2, \quad (13)$$

условие (11) примет вид

$$y_0 > 0, \quad z_0 > 0, \quad K_1 < 0, \quad \Pi_1 < 0. \quad (14)$$

Здесь $K_1 = 0$ есть уравнение цилиндра K (рисунок), касающегося сферы σ вдоль линии $z_0 = 0$.



Подобным же образом $\Pi_1 = 0$ представляет уравнение цилиндрической поверхности Π , касающейся сферы σ вдоль линии $y_0 = 0$.

Решение (11) в указанной области согласно (8) имеет вид

$$u = \frac{B}{\pi} \int \int \delta(1 - \xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta, \quad (15)$$

причем интегрирование ведется по области (10), которой в данном случае будет весь круг $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$. Можно получить, что в этой области решение постоянно и по (15) имеет вид $u = B$.

Таким образом, область (11) есть область постоянного решения и ограничена плоскостью S , поверхностями K и Π .

$$2. \quad -\frac{y_0}{\lambda\sqrt{\delta}} > 1, \quad -\frac{z_0}{\lambda\sqrt{\delta}} > 1. \quad (16)$$

Тогда $y_0 < 0$, $z_0 < 0$, $K_1 < 0$, $\Pi_1 < 0$, причем из (10) и (15) следует $u = 0$. Указанная область находится вне сферы σ и вне цилиндров K и Π .

$$3. \quad \sqrt{\delta} > -\frac{y_0}{\lambda} > -\sqrt{\delta}, \quad -\frac{z_0}{\lambda} < -\sqrt{\delta}. \quad (17)$$

Отсюда следует $z_0 > 0$, $\Pi_1 < 0$, $K_1 > 0$.

Область интегрирования дается (10), причем из (16) получится

$$u = \frac{1}{\pi} B \int_{[(y_0)/(\lambda)]}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{B}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{K_1} \lambda}{-y_0}. \quad (18)$$

Полученное решение верно внутри цилиндра К и вне поверхности П (а также сферы $\delta_0 = 0$).

$$4. \quad -\frac{y_0}{\lambda\sqrt{\delta}} < -1, \quad \sqrt{\delta} > -\frac{z_0}{\lambda} > -\sqrt{\delta}. \quad (19)$$

Отсюда следует $y_0 > 0$, $K_1 < 0$, $\Pi_1 > 0$. Область интегрирования дается (10), из (15) получится

$$u = \frac{1}{\pi} B \int_{[(y_0)/(\lambda)]}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{B}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Pi_1} \lambda}{-z_0}. \quad (20)$$

Полученное решение верно внутри цилиндра П и вне цилиндра К и сферы σ . Следует отметить, что в (18), (20) при $y_0 < 0$ и $z_0 < 0$ решение на К и П соответственно обращается в нуль, тогда как при $y_0 > 0$ и $z_0 > 0$ согласно соотношению $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg}x$ решение на К и П равно В, что соответствует части поверхностей К и П, граничащей с областью (11).

$$5. \quad \left| \frac{y_0}{\lambda\sqrt{\delta}} \right| < 1, \quad \left| \frac{z_0}{\lambda\sqrt{\delta}} \right| < 1, \quad y_0 < 0, \quad z_0 < 0. \quad (21)$$

Область интегрирования дается (10), причем из (15) получится

$$u = \frac{B}{2\pi} \arcsin \frac{\sqrt{K_1} \sqrt{\Pi_1} - \frac{y_0 z_0}{2C_0^2 t}}{\delta}. \quad (22)$$

Точка (x_0, y_0, z_0) находится вблизи участка сферы σ .

Рассмотрим задачу определения нелинейного решения в области 3 вблизи цилиндрической волны К, где решение двумерное и определяется переменными K_1, y_0 . В нелинейной задаче функции E_y и E_z связаны, причем линейные решения для E_z даются (8)-(21), а для E_y теми же соотношениями с заменой В на А. Аналогично можно получить решение в области 4 вблизи цилиндрической волны П, определяемое Π_1, z_0 . Эти решения соответствуют упрощенным нелинейным уравнениям коротких волн [3]

$$\frac{1}{3} \delta_3 \frac{\partial}{\partial \delta'} (E^2 E_{z,y}) - \delta' \frac{\partial E_{z,y}}{\partial \delta'} + \frac{1}{2} E_{z,y} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_{y,z}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_{y,z}}{\partial \delta'} = \frac{\partial E_{z,y}}{\partial y}, \quad (23)$$

где $\delta' = [(K_1)/t]$, $[(y_0)/(C_0 t)] = y$ и функции $V_{y,z}$ введены по (23). Решение нелинейной задачи, как и в случае одной функции u [3], находится сращиванием с линейным решением (18), причем $\mu = [(E_z)/B]$, $\mu' = [(E_y)/A]$ и, как показывает (18), $\mu' = \mu$, $V_y = [A/B] V_z$, и (23) дает

$$V_y = \left(\frac{1}{\pi} B \operatorname{tg} \pi \mu - B \mu \right) y, \quad \delta' = -\frac{1}{2} \mu y^2 \operatorname{tg}^2 \pi + F(\mu). \quad (24)$$

Уравнения (23) примут вид

$$\frac{1}{3} (B^2 + A^2) \delta_3 \frac{\partial}{\partial \delta'} \mu^3 - \delta' \frac{\partial \mu}{\partial \delta'} + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2B} \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial V_y}{\partial \delta'} = \frac{\partial \mu}{\partial y}. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (25), где поменены ролями δ' и μ , получим

$$F(\mu) = -(B^2 + A^2) \delta_3 \mu^2 - (B^2 + A^2) \delta_3 \frac{1}{\pi} \mu \sin 2\pi \mu + 2(B^2 + A^2) \delta_3 \sin 2\pi \mu \ln \sin \pi \mu \quad (26)$$

Решение (24) и (26) удовлетворяет уравнениям (25) и условию сращивания с линейным решением (18), для которого F следует отбросить. Таким же образом находится решение нелинейной задачи вблизи волны П. Найдём нелинейное решение вблизи волны σ .

Уравнения движения вблизи точки В имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} C_0 \frac{\partial V_y}{\partial y_0} + \frac{1}{2} C_0 \frac{\partial V_z}{\partial z_0} + \frac{1}{3} \delta_3 u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau_0} + \frac{u}{t} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} &= \frac{\partial V_y}{C_0 \partial \tau_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial z_0} = \frac{\partial V_z}{C_0 \partial \tau_0}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из последних двух уравнений, обозначая $[(z_0)/(C_0 t)] = z$, $[(\tau_0)/t] = -\tau$ и подставляя и из (22), можно получить V_y, V_z в линейном случае, выражая их через μ и считая, что эти выражения верны и в нелинейном случае. Можно, подставляя их в первое уравнение, получить решение в виде

$$\begin{aligned} \tau_0' 2 \cos^2 \pi \mu &= (y^2 + z^2) \sin^2 2\pi \mu + 2yz \sin 2\pi \mu, \\ \tau &= \tau_0' - \delta_3 (A^2 + B^2) \mu^2 + 2\delta_3 \sin 2\pi \mu (A^2 + B^2) \int_1^{\mu} \frac{\mu d\mu}{\sin 2\pi \mu}. \end{aligned} \quad (28)$$

Институт механики НАН РА
Горисский филиал ГИУА

Литература

1. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. М. ИЛ. 1962. 232 с.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухорунов А.П. Теория волн. М. Наука. 1979. 384 с.
3. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. - Изв. АН АрмССР. 1968. Т.21. N1. С. 39-56.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա.Գ.Բազդոն, Յու.Ս.Սաֆարյան, Հ.Ա.Մարտիրոսյան

Ոչ գծային ոչ ստացիոնար տարածական էլեկտրամագնիսական ալիքի
դիֆրակցիայի խնդիրը կամայական բևեռացման դեպքում

Դիտարկվում է հարթ էլեկտրամագնիսական ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը ոչ
թափանցիկ $[(3\pi)/2]$ անկյան տեսքով էկրանի մոտ ոչ գծային միջավայրում: Ստացված
են գծային և ոչ գծային անալիտիկ լուծումներ ալիքի էլեկտրական դաշտի կամայական
ուղղության համար: