УДК 510.52

В.В.Мкртчян, Р.Р.Камалян

О NP-полноте "СВЯЗНОЙ 3-ВЫПОЛНИМОСТИ"

(Представлено академиком Ю.Г. Шукуряном 14/XI 2002)

В различных областях прикладной математики на протяжении последних 30 лет большое внимание уделяется изучению так называемых NP-полных задач. В основополагающих работах [1,2] приведены определение и доказательство существования таких задач и отмечена их тесная взаимосвязь друг с другом. Список NP-полных задач быстро растет и в настоящее время содержит, согласно [3], около десяти тысяч задач. Первые попытки их систематизации и классификации были сделаны в [4].

Исторически первой NP-полной задачей является задача из математической логики, известная под названием "ВЫПОЛНИМОСТЬ" [1]. Важный частный случай этой задачи, известный под названием "3-ВЫПОЛНИМОСТЬ", также представляет собой NP-полную задачу [1] и часто употребляется для доказательства NP-полноты задач из теории графов и комбинаторного анализа [2,4,5].

Настоящее исследование посвящено более подробному анализу задачи "3-ВЫПОЛНИМОСТЬ". В работе сформулирована задача "СВЯЗНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ", являющаяся интересным частным случаем задачи "3-ВЫПОЛНИМОСТЬ", и доказана ее NP-полнота. Предложен соответствующий полиномиальный алгоритм сведения задачи "3-ВЫПОЛНИМОСТЬ" к задаче "СВЯЗНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ". Не определяемые понятия можно найти в [1,2,5-7].

Пусть $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ есть множество булевых переменных, $D=\{D_1,D_2,\dots,D_r\}$ - множество дизъюнкций, составленных из литералов переменных множества X, $\tau(D_i)$ обозначает множество индексов переменных, входящих в дизъюнкцию D_i, $i = 1,2,\dots, r$, и $K(x_1,x_2,\dots,x_n) = D_1\&D_2\&\dots\&D_r$ - конъюнктивная нормальная форма.

Определение. Графом $G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))$ конъюнктивной нормальной формы $K(x_1,x_2,\dots,x_n)$ называется граф, для которого множества $V(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n)))$ и $E(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n)))$ вершин и ребер, соответственно, определяются следующим образом:

$$V(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))) \equiv \bigcup_{i=1}^{r} V(D_i), \text{ где при } i = 1,2,\dots,r$$

$$V(D_i) = \{ v_j^{(i)} | 1 \le j \le n,\ j \in \tau(D_i)\};$$

$$E(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))) \equiv E_1(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n)))\cup E_2(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))),$$

где $E_1(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))) = \bigcup_{i=1}^{r} E_{1i}(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n)))$, и для $i = 1,2,\dots,r$

$$E_{1i}(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))) = \{(u,w)|\{u,w\} \subseteq V(D_i),\ u \neq w\},$$

$$E_2(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))) = \bigcup_{p=1}^{n} E_{2p}(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))),\ \text{и для } p = 1,2,\dots,n$$

$$E_{2p}(G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))) = \{(v_p^{(s)}, v_p^{(t)})|1 \le s \le r,\ 1 \le t \le r,\ s \neq t,\ p \in \tau(D_s)\cap\tau(D_t)\}.$$

Задача: СВЯЗНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ.

Условие: Пусть X есть множество булевых переменных, и $K(x_1,x_2,\dots,x_n) = D_1\&D_2\&\dots\&D_r$ есть конъюнктивная нормальная форма, составленная из дизъюнкций, каждая из которых содержит 3 литерала переменных множества X, и граф $G(K(x_1,x_2,\dots,x_n))$ связный.

Вопрос: Существует ли такая последовательность $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ с $\alpha_i \in \{0,1\}$ для $i = 1,2,\dots,n$, для которой $K(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = 1$?

Теорема. Задача "СВЯЗНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ" NP-полна.

Доказательство. Принадлежность задачи "СВЯЗНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ" к классу NP следует из того, что эта задача есть частный случай задачи "3-ВЫПОЛНИМОСТЬ", NP-полнота которой была установлена в [1]. Опишем полиномиальный алгоритм, сводящий задачу "3-ВЫПОЛНИМОСТЬ" к задаче "СВЯЗНАЯ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ".

Пусть X(3-ВЫП.) = $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ и D(3-ВЫП.) = $\{D_1,D_2,\dots,D_r\}$ есть, соответственно, множества переменных и дизъюнкций для индивидуальной задачи I′ из "3-ВЫПОЛНИМОСТИ".

Положим:

$$X(\text{СВЯЗНАЯ 3–ВЫП.}) \equiv X(\text{3–ВЫП.})\cup Z,\ \text{где } Z = \{z_{n+1},z_{n+2},\dots,z_{n+r},z_{n+r+1}\}$$

есть множество булевых переменных, причем $Z\cap X(\text{3-ВЫП.})=\varnothing$;

$$D(\text{СВЯЗНАЯ 3–ВЫП.}) \equiv \bigcup_{i=1}^{3} D^{(i)}(\text{СВЯЗНАЯ 3–ВЫП.}),\ \text{где при } i = 1,2,3$$

$D^{(i)}$(СВЯЗНАЯ 3–ВЫП.) = $\{D^{(i)}{}_1,D^{(i)}{}_2,\dots,D^{(i)}{}_r\}$, а дизъюнкции $D^{(1)}{}_j$, $D^{(2)}{}_j$, $D^{(3)}{}_j$ строятся по дизъюнкции D_j при $j = 1,2,\dots, r$ следующим образом:

если $D_j = a \vee b \vee c$, где каждое из a,b,c есть литерал переменной множества X(3-ВЫП.), то

$$D_j^{(1)} \equiv a \vee b \vee z_{n+j},\ \ D_j^{(2)} \equiv c \vee \neg z_{n+j} \vee z_{n+r+1},\ \ D_j^{(3)} \equiv c \vee \neg z_{n+j} \vee \neg z_{n+r+1};$$

$$K = \mathop{\&}_{D \in D(\text{СВЯЗНАЯ 3–ВЫП.})} D$$

Заметим, что каждая дизъюнкция из множества дизъюнкций D(СВЯЗНАЯ 3-ВЫП.) содержит 3 литерала переменных множества X(СВЯЗНАЯ 3-ВЫП.).

Нетрудно также убедиться, что граф G(K) конъюнктивной нормальной формы K является связным. Это следует из того, что в графе G(K) существует клика, содержащая 2r вершин, такая, что любая не принадлежащая ей вершина графа G(K) либо смежна вершине клики, либо соединена с некоторой вершиной клики простой цепью, содержащей не более трех ребер.

Рассмотрим индивидуальную задачу I'' из "СВЯЗНОЙ 3-ВЫПОЛНИМОСТИ" с множеством булевых переменных X(СВЯЗНАЯ 3-ВЫП.), конъюнктивной нормальной формой K, составленной из множества дизъюнкций D(СВЯЗНАЯ 3-ВЫП.).

Покажем, что в индивидуальной задаче I′ из "3-ВЫПОЛНИМОСТИ" ответ положителен тогда и только тогда, когда ответ в индивидуальной задаче I′′ из "СВЯЗНОЙ 3-ВЫПОЛНИМОСТИ" положителен.

Пусть последовательность $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ с $\beta_i \in \{0,1\}$ при $i = 1,2,\ldots,n$ значений переменных множества X(3-ВЫП.) $x_1,x_2,\ldots,x_n$, соответственно, такая, что все дизъюнкции из D(3-ВЫП.) принимают значение 1.

Укажем последовательность $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{n+r},\alpha_{n+r+1})$ с $\alpha_i \in \{0,1\}$ при $i = 1, 2, \ldots, n + r + 1$ значений переменных множества X(СВЯЗНАЯ 3-ВЫП.) $x_1,x_2,\ldots,x_n,z_{n+1},\ldots,z_{n+r},z_{n+r+1}$, соответственно, для которой $K(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{n+r},\alpha_{n+r+1}) = 1$.

Нетрудно проверить, что в качестве такой последовательности может служить последовательность, определенная следующим образом:

$\alpha_i \equiv \beta_i$ для $i = 1,2,\ldots,n$, $\alpha_{n+r+1} \equiv 0$, а при $j = 1,2,\ldots,r$ значение α_{n+j} определяется по дизъюнкции $D_j = a \vee b \vee c$ как значение булевой функции $\neg(a \vee b)$ на последовательности $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, где каждое из a,b,c есть литерал переменной множества X(3-ВЫП.).

Обратно, пусть последовательность $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1},\ldots,\lambda_{n+r},\lambda_{n+r+1})$ с $\lambda_i \in \{0,1\}$ при $i = 1, 2, \ldots, n + r + 1$ значений переменных множества X(СВЯЗНАЯ 3-ВЫП.) $x_1,x_2,\ldots,x_n,z_{n+1},\ldots,z_{n+r},z_{n+r+1}$, такова, что $K(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1},\ldots,\lambda_{n+r},\lambda_{n+r+1}) = 1$.

Укажем последовательность $(\mu_1,\mu_2\ldots,\mu_n)$ с $\mu_i \in \{0,1\}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ значений переменных множества X(3-ВЫП.) $x_1,x_2,\ldots,x_n$, при которой все дизъюнкции из D(3-ВЫП.) принимают значение 1. Нетрудно проверить, что в качестве такой последовательности может служить последовательность, определенная следующим образом:

$$\mu_i = \lambda_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если в качестве Length[I′] [4] взять произведение числа переменных и числа дизъюнкций задачи I′, то произведение 3r(n + r + 1) числа переменных и числа дизъюнкций задачи I″, которое можно принять в качестве Length[I″], очевидно, ограничено функцией $O((\text{Length}[I'])^2)$, что и показывает полиномиальность описанного сведения.

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Cook S.A.* Proc. 3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing, Association for Computing Machinery. NewYork. 1971. P.151-158.
2. *Karp R.M.* in: R.E.Miller and J.W.Thatchers(eds). Complexity of Computer Computations. Plenum Press. New York. 1972. P.85-103.
3. URL: http://www.msci.memphis.edu/~giri/7713/f98/lec10.html
4. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. San Francisco: W. H. Freeman & Company. Publishers. 1979.
5. *Papadimitriou C.H., Steiglitz K.* Combinatorial optimization: Algorithms and Complexity. PRENTICE-HALL. INC Englewood Cliffs. New Jersey.1982.
6. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley. Reading. MA.1969.
7. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М. Наука. 1986. 384 с.

Վ.Վ. Մկրտչյան, Ռ.Ռ. Քամալյան

«ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ 3-ԻՐԱԳՈՐԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ» NP-լրիվության մասին

Աշխատանքում ապացուցված է «3-ԻՐԱԳՈՐԾԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆ» խնդրի մի մասնավոր դեպքի NP-լրիվությունը, որում կամայական երկու փոփոխականների համար գոյություն ունի փոփոխականների այնպիսի հաջորդականություն, որը սկսվում է նրանցից մեկով, ավարտվում՝ մյուսով և որի ցանկացած երկու հարևան փոփոխականների համար գոյություն ունի այդ փոփոխականների լիտերալները պարունակող դիզյունկցիա: