

УДК 615.47

А.А.Аракелян, А.Г. Кардашян

Сплайн обработка двумерных медико-биологических сигналов

(Представлено академиком А.А.Терзяном 26/VIII 2002)

В работах [1-5] предложены методы спектрального анализа сигналов, основанные на применении итеративных сплайнов. В [3-5] рассматриваются численные методы спектрального анализа одномерных сигналов. Однако известно, что анализ электроретинограммы (ЭРГ) или реогепаатограммы (РГГ) [6] необходимо осуществлять одновременно с использованием электрокардиограммы (ЭКГ). Следовательно, результаты [1-2] невозможно применять для реализации спектрального анализа ЭРГ и РГГ. Необходимость создания методов спектрального анализа двумерных сигналов определяет задачу, решению которой посвящена данная работа.

Изучены методы численного решения задач спектрального анализа, а также их алгоритмическая и программная реализация. Техническая реализация осуществлена на базе сигнального процессора DSP56F803 фирмы Motorola [7].

Определения и обозначения. Пусть в прямоугольной области $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ [8] введена сетка $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где

$$\begin{aligned} \Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \\ \Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_M = d, \end{aligned} \tag{1}$$

делящая область на прямоугольные ячейки, и известны значения функции $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$. Через $C^{k,l}[\Omega]$ обозначим множество непрерывных на Ω функций $f(x,y)$, имеющих непрерывные частные производные порядка не выше k по x и l по y .

Для каждой элементарной ячейки $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ определим функцию $S_{i,j}(x,y)$ двумерного кубического сплайна

$$S_{i,j}(x,y) = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 c_{\alpha\beta}^{i,j} (x - x_i)^\alpha (y - y_j)^\beta. \tag{2}$$

Далее для той же ячейки $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ определим сплайн преобразование Фурье

$$H_{i,j}(\omega_1, \omega_2) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} S_{i,j}(x,y) e^{-j\omega_1 x} e^{-j\omega_2 y}, \tag{3}$$

позволяющее вычислить значения $H_{i,j}(\omega_1, \omega_2)$, $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, M$. Отсюда преобразование Фурье во всей области $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ будет иметь вид

$$H(\omega_1 \omega_2) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M H_{i,j}(\omega_1 \omega_2). \quad (4)$$

Оценка точности аппроксимации. Положим

$$E = B_0[\omega_1(f(x,y), \Delta_n) + \omega_2(f(x,y), \Delta_m)],$$

где B_0 абсолютная величина, не зависящая от функции $f(x,y)$ и сетки $\Delta_{n,m}$,

$$\omega_1(f(x,y), \delta_n) = \sup_{c \leq y \leq d} \sup_{\substack{a \leq x, x+h \leq b \\ |h| < \delta_n}} |f(x+h, y) - f(x, y)|, \quad (5)$$

$$\omega_2(f(x,y), \delta_m) = \sup_{c \leq x \leq d} \sup_{\substack{a \leq y, y+h \leq b \\ |h| < \delta_m}} |f(x, y+h) - f(x, y)|.$$

Пусть $H_f(\omega)$, $H_s(\omega)$ - преобразования Фурье соответственно исходной и сплайн аппроксимации изучаемой функции.

Имеет место

Теорема. Если функция $f(x,y) \in C^{k,i}[\Omega]$ определена на сетке (1) и удовлетворяет периодическим краевым условиям (т.е является $(b-a)$ периодической по x и $(d-c)$ периодической по y), то

$$|H_f(\omega) - H_s(\omega)| \leq E(b-a)(d-c). \quad (6)$$

Доказательство. Так как $S_2(x,y)$ интерполирует функцию $f(x,y) \in C^{k,1}[\Omega]$ на сетке $\Delta_{n,m}$ и удовлетворяет краевым периодическим условиям, то

$$\|f(x,y) - S_3(x,y)\| \leq B_0[\omega_1(f(x,y), \Delta_n) + \omega_2(f(x,y), \Delta_m)], \quad (7)$$

где

$$\|\Delta_n\| = \max_{0 \leq i \leq n+1} |x_{i+1} - x_i|, \quad \|\Delta_m\| = \max_{0 \leq i \leq n+1} |y_{i+1} - y_i| \quad (8)$$

Из (6) следует, что правая часть неравенства (7) не зависит от функции $f(x,y)$ [8].

Так как $\|f(x,y) - S_3(x,y)\|_{C(\mathfrak{R})} = \max |f(x,y) - S_3(x,y)|$, то неравенство (7) можно записать как $|f(x,y) - S_3(x,y)| \leq E$.

$$a \leq x \leq b$$

$$c \leq y \leq d$$

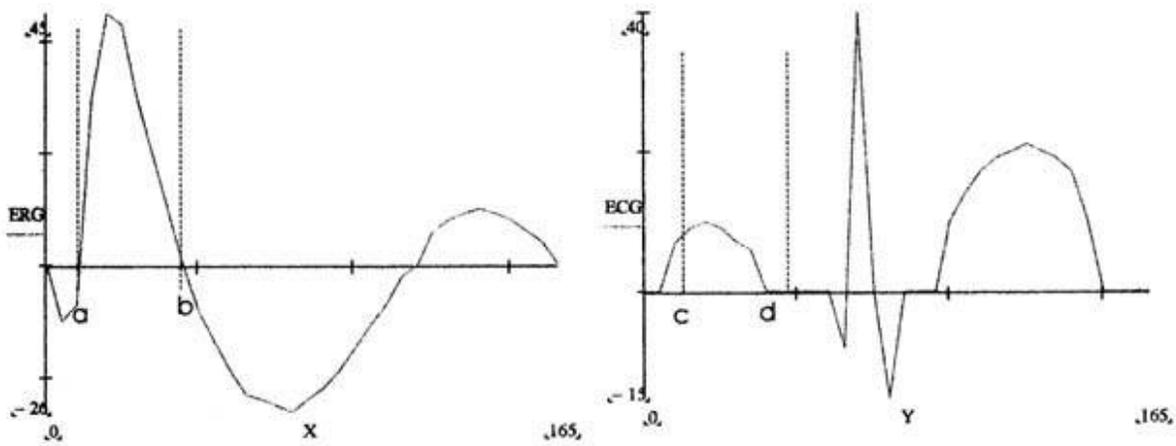
Следовательно,

$$\int_a^b \int_c^d |f(x,y) - S_3(x,y)| e^{-j\omega_1 x} e^{-j\omega_2 y} dx dy \leq \int_a^b \int_c^d |E e^{-j\omega_1 x} e^{-j\omega_2 y}| dx dy,$$

$$\left| \int_a^b \int_c^d f(x,y) e^{-j\omega_1 x} e^{-j\omega_2 y} dx dy - \int_a^b \int_c^d S_3(x,y) e^{-j\omega_1 x} e^{-j\omega_2 y} dx dy \right| \leq E(b-a)(d-c).$$

Отсюда $|H_f(\omega) - H_S(\omega)| \leq E(b-a)(d-c)$, что и требовалось доказать.

Численный пример. В качестве примера рассмотрим функцию $F(x,y)$ (рис.2), полученную линейной комбинацией ЭРГ и ЭКГ, приведенных на рис.1.



а) электроретинограмма

б) электрокардиограмма

Рис.1

На рис. 3 приведено сплайн преобразование Фурье (4) во всей области $[a,b] \times [c,d]$.

Для сравнения на рис.4 приведено преобразование Фурье функции, аппроксимированной при помощи интерполяционных формул Лагранжа, вычисленное с помощью программного пакета MathCad Professional 2001.

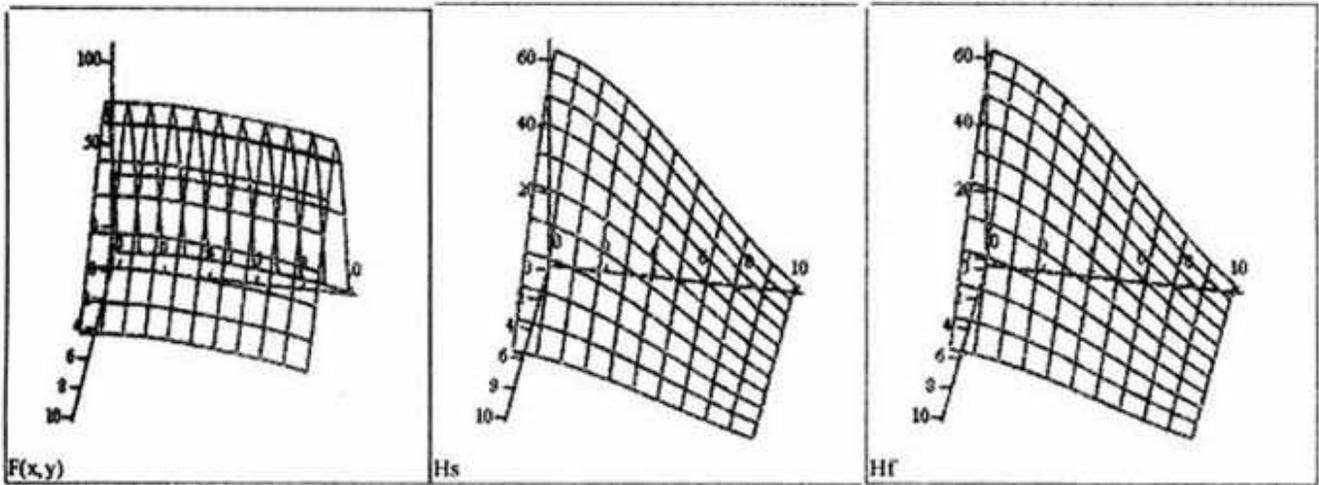


Рис.2

Рис.3

Рис.4

Результаты численных экспериментов, показывают, что погрешность численного метода не превышает 1-2%.

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. Ларсен Р.Д., Крофорд Е.Ф., Смит Р.У. - ТИИЭР. 1977. Т.65 N5. С.247-250.
2. Малинин Л.А. - Новости медицинской техники. 1980. вып 2. С. 25.
3. Arakelian A., Agaian S. - Cybernetics and system research. 1984. N2. North Holland.
4. Slonim M.A. - Proc. of the IEEE. 1979. V. 67. N6. P.953-954.
5. Usmani R.A., Winnipeg and Sakai M., Kagoshima, - Computing. 1996. V. 56. P.87-93.
6. Шамшинова А.М., Волков В.В. Функциональные методы исследования в офтальмологии. М. Медицина. 1998. 416с.
7. Personal ECG monitor using DSP56F803/5. Application Brief. <http://www.motorola.com/brdata/PDFDB/docs/BR1560.pdf>
8. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Слайны в вычислительной математике. М. Наука. 1976. 248с.

Ա.Հ. Առաքելյան, Ա.Գ. Կարդաշյան

Երկչափ կենսաբժշկական ազդանշանների սպլայն մշակում

Առաջարկված է մեթոդ բազմաչափ կենսաբժշկական ազդանշանների թվային մշակման համար, սպլայն ինտերպոլյացիայի միջոցով: Մշակված են ալգորիթմ և սարք, որոնք իրականացնում են տվյալ մեթոդը՝ երկչափ ազդանշանների համար: Մշակված է սպլայնի կիրառման դեպքում առաջացող սխալանքի գնահատման թեորեմ՝ ազդանշանների սպեկտրալ վերլուծության համար: Բերված է երկչափ ազդանշանի սպլայն մշակման օրինակ, որը ստացվում է էլեկտրասրտագրի և էլեկտրաբեռնագրի գծային համակցության միջոցով: