

Академик Д.М.Седракян, А.Ж.Хачатрян, Н.М.Испирян

Поле произвольно поляризованной плоской электромагнитной волны, падающей наклонно на нерегулярную слоистую структуру

(Представлено 12/VII 2002)

В данной работе нами рассматривается задача определения поля монохроматической плоской электромагнитной волны, падающей наклонно на нерегулярную слоистую структуру, характеризующуюся диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_I, & z < 0, \\ \varepsilon(z), & 0 < z < d, \\ \varepsilon_{II}, & z > d, \end{cases} \quad (1)$$

где, в общем случае, ε_I , ε_{II} различны и $\varepsilon(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) = & \varepsilon_0 \theta(z) \theta(z_1 - d_1/2 - z) + \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \theta(z - z_n + d_n/2) \theta(z_n + d_n/2 - z) + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_0 \theta(z - (z_n + d_n/2)) \theta(z_{n+1} - d_{n+1}/2 - z) + \varepsilon_0 \theta(d - z) \theta(z - z_N - d_N/2). \end{aligned} \quad (2)$$

На параметры структуры, характеризующие расположение слоев, должны быть наложены следующие ограничения: $z_1 - d_1/2 \geq 0$, $z_n + d_n/2 \leq d$, $z_n + d_n/2 \leq z_{n+1} - d_{n+1}/2$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$).

Пусть волновой вектор плоской волны, падающей на нерегулярную слоистую среду (2) из первой полубесконечной среды, расположен в плоскости (y, z) . Тогда, рассматривая электрическую компоненту поля как реальную часть комплексного вектора $\vec{E} \exp \{-i\omega t\}$, вследствие однородности пространства вне слоя (1), пространственную зависимость вектора $\vec{E}$ можно записать в виде

$$\vec{E}_r = \begin{cases} \vec{E}_0 \exp\{i \vec{k}_1 \vec{r}\} + \vec{E}_r \exp\{i \vec{k}'_1 \vec{r}\}, & x < 0, \\ \vec{E}_t \exp\{i \vec{k}_2 \vec{r}\}, & x > d, \end{cases} \quad (3)$$

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1| = k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_I/c}, \quad |\vec{k}_2| = k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_{II}/c}, \quad \vec{k}_1 = k_1 \cos \alpha \vec{e}_3 + k_1 \sin \alpha \vec{e}_2,$$

$$\vec{k}'_1 = -k_1 \cos \alpha \vec{e}_3 + k_1 \sin \alpha \vec{e}_2, \quad \vec{k}_2 = k_2 \cos \beta \vec{e}_3 + k_2 \sin \beta \vec{e}_2, \quad (4)$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ являются единичными базисными векторами выбранной системы координат. Вследствие закона Снеллиуса

$$\sqrt{\varepsilon_I} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_{II}} \sin \beta. \quad (5)$$

Принимая для s и p волн $E = E^s(z)V(y)$ и $H = H^p(z)U(y)$, из уравнений Максвелла для $E^s(z)$ и $H^p(z)$ можно записать [1]

$$\frac{d^2 E^s(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon(z) - \varepsilon_I \sin^2 \alpha) E^s(z) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{dH^p(z)}{dz} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_I \sin^2 \alpha}{\varepsilon(z)} \right) H^p(z) = 0. \quad (7)$$

Далее для удобства мы вводим следующие обозначения:

$$\psi^s \equiv E^s \text{ и } \psi^p \equiv H^p. \quad (8)$$

Используя (6), (7), легко убедиться, что следующие величины, составленные из ψ^s и ψ^p , не зависят от z:

$$\psi^s \frac{d(\psi^s)^*}{dz} - (\psi^s)^* \frac{d\psi^s}{dz} = \text{const}, \quad \frac{1}{\varepsilon(z)} (\psi^p \frac{d(\psi^p)^*}{dz} - (\psi^p)^* \frac{d\psi^p}{dz}) = \text{const} \quad (9)$$

Используя условие непрерывности компонент поля во всех точках пространства, из (9) легко получить условия, накладываемые на производные функций ψ^s и ψ^p в точках, где свойства среды меняются скачкообразно:

$$\psi^S(z-0) = \psi^S(z+0), \quad d\psi^S/dz|_{z=0} = d\psi^S/dz|_{z+0}, \quad (10)$$

$$\psi^p(z-0) = \psi^p(z+0), \quad 1/\varepsilon(z-0)d\psi^p/dz|_{z=0} = 1/\varepsilon(z+0)d\psi^p/dz|_{z=0}. \quad (11)$$

Рассмотрим решения волновых уравнений (6), (7) с асимптотическим поведением вида (3)

[illegible]

$$q_I = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_I} \cos \alpha}{c}, q_{II} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_{II}} \cos \beta}{c}, q_n = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_n} \cos \gamma_n}{c}, (n = 0, 1, \dots, N). \quad (13)$$

Заметим, что согласно закону Снеллиуса (5), углы преломления волны γ_n в соответствующих

слоях нерегулярной структуры выражаются через угол падения α : $\cos \gamma_n = \sqrt{1 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha / \varepsilon_n}$. В (12) величины $T^{s,p}_{N,I,II}$ и $R^{s,p}_{N,I,II}$ являются амплитудами отражения и прохождения волны для нерегулярной структуры:

$$T_{N,I,II}^s = \frac{\psi_t^s}{\psi_0^s}, R_{N,I,II}^s = \frac{\psi_r^s}{\psi_0^s} \text{ и } T_{N,I,II}^p = \frac{\psi_t^p}{\psi_0^p}, R_{N,I,II}^p = \frac{\psi_r^p}{\psi_0^p}, \quad (14)$$

$$1 - |\mathbf{R}_{\text{N III}}^{\text{s}}|^2 = (q_{\text{II}}/q_{\text{I}})|\mathbf{T}_{\text{N III}}^{\text{s}}|^2, 1 - |\mathbf{R}_{\text{N III}}^{\text{p}}|^2 = (\varepsilon_{\text{I}}q_{\text{II}}/\varepsilon_{\text{II}}q_{\text{I}})|\mathbf{T}_{\text{N III}}^{\text{p}}|^2, \quad (15)$$

где ψ_0^s , ψ_t^s , ψ_r^s и ψ_0^p , ψ_t^p , ψ_r^p являются амплитудами электрической и магнитной компонент, соответственно, падающей, прошедшей, отраженной s и p поляризованных волн.

Введем амплитуды прохождения и отражения $t_{1,0}^{s,p}$, $r_{1,0}^{s,p}$ ($t_{0,II}^{s,p}$, $r_{0,II}^{s,p}$) для s и p электромагнитных волн (для первой полубесконечной среды, когда справа от нее находится полубесконечная среда с диэлектрической постоянной ϵ_0 , и для второй полубесконечной среды,

когда слева от нее полубесконечная среда с диэлектрической постоянной ε_0):

$$\frac{1}{t_{0,\Pi}^s} = \frac{q_0 + q_{\Pi}}{2q_0} \exp \{ i(q_{\Pi} - q_0)d \}, \quad \frac{r_{0,\Pi}^s}{t_{0,\Pi}^s} = \frac{q_0 - q_{\Pi}}{2q_0} \exp \{ i(q_{\Pi} + q_0)d \}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{t_{0,\Pi}^p} = \frac{\varepsilon_{\Pi}q_0 + q_{\Pi}}{2\varepsilon_{\Pi}q_0} \exp \{ i(q_{\Pi} - q_0)d \}, \quad \frac{r_{0,\Pi}^p}{t_{0,\Pi}^p} = \frac{\varepsilon_{\Pi}q_0 - q_{\Pi}}{2\varepsilon_{\Pi}q_0} \exp \{ i(q_{\Pi} + q_0)d \}. \quad (17)$$

Выражения для $t_{I,0}^s$, $r_{I,0}^s$ получаются из (16) подстановкой $d = 0$, с последующей заменой q_0 на q_I и q_{Π} на q_0 . Выражения для $t_{I,0}^p$, $r_{I,0}^p$ получаются из (17) подстановкой $d = 0$, с последующей заменой $\varepsilon_{\Pi}q_0$ на q_I и q_{Π} на ε_Iq_0 . Обозначим через $t_{0,n}^{s,p}$, $r_{0,n}^{s,p}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) амплитуды отражения и прохождения волны для границы раздела двух полубесконечных сред с диэлектрическими постоянными ε_0 и ε_n , граничащими в точке $z_n - d_n/2$. Амплитуды $t_{0,n}^{s,p}$, $r_{0,n}^{s,p}$ получаются заменой в (16), (17) q_{Π} на q_n и d на d_n . Введем также амплитуды прохождения и отражения волны $t_n^{s,p}$, $r_n^{s,p}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) для каждого слоя нерегулярной структуры:

$$\frac{1}{t_n^s} = \exp(iq_0d_n) \left\{ \cos(q_nd_n) - i \frac{q_n^2 + q_0^2}{2q_nq_0} \sin(q_nd_n) \right\}, \quad (18)$$

$$\frac{r_n^s}{t_n^s} = i \exp \{ i2q_0z_n \} \frac{q_n^2 - q_0^2}{2q_nq_0} \sin(q_nd_n), \quad (19)$$

$$\frac{1}{t_n^p} = \exp(iq_0d_n) \left\{ \cos(q_nd_n) - i \frac{(\varepsilon_0/\varepsilon_n)q_n^2 + (\varepsilon_n/\varepsilon_0)q_0^2}{2q_nq_0} \sin(q_nd_n) \right\}, \quad (20)$$

$$\frac{r_n^p}{t_n^p} = i \exp \{ i2q_0z_n \} \frac{(\varepsilon_0/\varepsilon_n)q_n^2 - (\varepsilon_n/\varepsilon_0)q_0^2}{2q_nq_0} \sin(q_nd_n). \quad (21)$$

Согласно основному результату метода трансфер-матриц между коэффициентами решения (12), соответствующими различным областям пространства, должна существовать линейная связь [2]. Так, линейные соотношения между коэффициентами решения $a_n^{s,p}$, $b_n^{s,p}$, соответствующими областям структуры с диэлектрической проницаемостью ε_0 , и коэффициентом решения $R_{N,I,\Pi}^{s,p}$ (область пространства, занимаемая первой полубесконечной средой) могут быть записаны в виде

$$a_n = \delta_{s,p} \left[\left(\frac{1}{t_{I,0}^*} \frac{1}{T_{n-1}^*} + \frac{r_{I,0}}{t_{I,0}^*} \frac{R_{n-1}^*}{T_{n-1}^*} \right) - \left(\frac{r_{I,0}^*}{t_{I,0}^*} \frac{1}{T_{n-1}^*} + \frac{1}{t_{I,0}^*} \frac{R_{n-1}^*}{T_{n-1}^*} \right) R_{N,I,II} \right], \quad (22)$$

$$b_n = \delta_{s,p} \left[- \left(\frac{1}{t_{I,0}^*} \frac{R_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{r_{I,0}}{t_{I,0}^*} \frac{1}{T_{n-1}} \right) + \left(\frac{r_{I,0}^*}{t_{I,0}^*} \frac{R_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{1}{t_{I,0}^*} \frac{1}{T_{n-1}} \right) R_{N,I,II} \right], \quad (23)$$

где $\delta_s = q_I/q_0$, $\delta_p = q_I \varepsilon_0/q_0 \varepsilon_I$, а у остальных величин индексы s, p опущены. В (22), (23) через T_n , R_n ($T_0 = 1$, $R_0 = 0$) обозначены амплитуды прохождения и отражения волны для первых n слоев нерегулярной структуры, когда левее и правее от нее диэлектрическая проницаемость пространства равна ε_0 :

$$\begin{pmatrix} 1/T_n^* & -R_n^*/T_n^* \\ -R_n/T_n & 1/T_n \end{pmatrix} = \prod_{l=n}^1 \begin{pmatrix} 1/t_l^* & -r_l^*/t_l^* \\ -r_l/t_l & 1/t_l \end{pmatrix} \quad (24)$$

Коэффициенты c_n , d_n ($n=1,2,\dots,N$) могут быть выражены через a_n , b_n согласно следующим формулам:

$$c_n = \Delta_{s,p}^n \left[\frac{1}{t_{0,n}^*} a_n - \frac{r_{0,n}^*}{t_{0,n}^*} b_n \right], \quad (25)$$

$$d_n = \Delta_{s,p}^n \left[- \frac{r_{0,n}}{t_{0,n}} a_n + \frac{1}{t_{0,n}} b_n \right]. \quad (26)$$

Из (25), (26) непосредственно следует, что коэффициенты c_n , d_n , так же как и a_n , b_n , выражаются через $R_{N,I,II}$ и T_n , R_n ($n = 1,2,\dots,N$). Таким образом, мы можем заключить, что коэффициенты решения (12) c_n , d_n ($n = 1,2,\dots,N$), a_n , b_n ($n = 1,2,\dots,N+1$), соответствующие областям пространства между полубесконечными средами ($0 < x < d$), выражаются через $R_{N,I,II}$, T_n , R_n , и поэтому вся задача сводится к двум задачам - задаче нахождения амплитуд прохождения $R_{N,I,II}$ и отражения $T_{N,I,II}$ для всей структуры (2) и задаче нахождения T_n , R_n , амплитуд рассеяния электрона для нерегулярной структуры с недостающими последними $N-n$ слоями.

Задача определения амплитуд рассеяния волны для нерегулярной структуры, заданной внутри конечного интервала и граничащей с обеих сторон с двумя различными полубесконечными средами, рассматривалась в работе [3], где было установлено, что

$$\frac{1}{T_{N,I,II}} = \frac{1}{t_{I,0}} \frac{1}{t_{0,II}} \frac{1}{T_N} + \frac{r_{0,II}}{t_{0,II}} \frac{r_{I,0}^*}{t_{I,0}^*} \frac{1}{T_N^*} + \frac{r_{I,0}^*}{t_{I,0}^*} \frac{1}{t_{0,II}} \frac{R_N}{T_N} + \frac{r_{0,II}}{t_{0,II}} \frac{1}{t_{I,0}} \frac{R_N^*}{T_N^*}, \quad (27)$$

$$\frac{R_{N,I,II}}{T_{N,I,II}} = \frac{1}{t_{I,0}^*} \frac{1}{t_{0,II}} \frac{R_N}{T_N} + \frac{r_{0,II}}{t_{0,II}} \frac{r_{I,0}}{t_{I,0}} \frac{R_N^*}{T_N^*} + \frac{r_{I,0}}{t_{I,0}} \frac{1}{t_{0,II}} \frac{1}{T_N} + \frac{r_{0,II}}{t_{0,II}} \frac{1}{t_{I,0}^*} \frac{1}{T_N^*}, \quad (28)$$

где T_N , R_N согласно (24) являются амплитудами рассеяния для всей решеточной структуры, когда во всех точках левее и правее от нее $\varepsilon_I = \varepsilon_{II} = \varepsilon_0$.

Как следует из (27), (28), задача нахождения амплитуд $R_{N,I,II}$ и $T_{N,I,II}$ сводится к определению величин T_n , R_n при $n = N$. Таким образом, мы показали, что задача определения волнового поля во всем пространстве для нерегулярной решеточной структуры (1), (2), в общем виде, сводится к задаче нахождения $2N$ величин T_n , R_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Последняя задача рассматривалась в [4], где было в частности установлено, что рассматриваемые величины являются зависимыми друг от друга, так что, рассматривая n как дискретную переменную, для них могут быть записаны следующие рекуррентные уравнения:

$$\frac{1}{T_n} = \frac{r_n}{t_n} \frac{R_{n-1}^*}{T_{n-1}^*} + \frac{1}{t_n} \frac{1}{T_{n-1}}, \quad (29)$$

$$\frac{R_n^*}{T_n^*} = \frac{r_n^*}{t_n^*} \frac{1}{T_{n-1}} + \frac{1}{t_n^*} \frac{R_{n-1}^*}{T_{n-1}^*} \quad (30)$$

с начальными условиями $T_0 = 1$, $R_0 = 0$.

Заметим, что для величин $1/T_n$, R_n^*/T_n^* (29), (30) представляют собой систему для двух линейных разностных уравнений, коэффициенты которых содержат только параметры рассеяния одного слоя. Таким образом, мы показали, что задача нахождения коэффициентов волнового поля (или же поля во всем пространстве) сводится к задаче решения некоторой системы из двух линейных разностных уравнений первого порядка.

Ереванский государственный университет
Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. Борн М., Вольф Э. - Основы оптики. М. Наука. 1973.
2. Erdos P., Herndon R.C. - Adv. Phys. 1982. V. 31. P. 65.
3. Хачатрян А.Ж., Седракян Д.М., Испирян Н.М. - Астрофизика. 2001. Т. 44. С. 634.
4. Sedrakian D.M., Gevorgyan A.H., Khachatrian A.Zh. - Optics Communication. 2001. V.192. P.135.

Ակադեմիկոս Դ.Մ.Սեդրակյան, Ա.Ժ.Խաչատրյան, Ն.Մ.Բսպիրյան

**Անկանոն շերտավոր համակարգի վրա թեք ընկնող կամայական բևեռացված
հարթ էլեկտրամագնիսական ալիքի դաշտը**

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ անկանոն շերտավոր համակարգի վրա թեք ընկնող կամայական բևեռացված հարթ էլեկտրամագնիսական ալիքի դաշտի որոշման խնդիրը ընդհանուր տեսքով կարելի է բերել երկու գծային վերջավոր տարբերակային հավասարումների լուծմանը: