

УДК 593.3

Академик М. А. Задоян

## Задача Гадолина для конических труб

(Представлено 6/V 2002)

Одним из способов повышения прочности составных цилиндрических труб является соединение их при горячей посадке таким образом, чтобы внутренний диаметр охватываемой трубы был несколько меньше наружного диаметра охватывающей трубы. После запрессовки на поверхности прилегания возникают силы трения, препятствующие их взаимному перемещению. Прочность толстостенной составной цилиндрической трубы можно увеличить почти вдвое, используя метод Гадолина [1,2]. В настоящей работе предлагается способ для повышения прочности толстостенных конических труб, основанный на идее Гадолина.

**1. Напряжение в конической трубе.** Предварительно рассмотрим толстостенную коническую трубу из несжимаемого упрочняющегося по степенному закону материала, находящегося под воздействием равномерно распределенных сил на внутренней и внешней конических поверхностях  $\sigma_\theta = -p_1, -p_2$  при  $\theta = \alpha, \beta$ . Полагаем, что касательные напряжения как на поверхностях, так и по всему объему трубы равны нулю. Принимаем равным нулю также продольное перемещение. Такое напряженно-деформированное состояние можно представить, с использованием [3], в следующем виде: отличные от нуля компоненты-

$$\sigma_r = \sigma_\theta + 3AkX \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 6AkX \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\sigma_\theta = -p_1 + 6Ak \int_\alpha^\theta X \frac{\cos^2\theta}{\sin^3\theta} d\theta, \quad X = 3^{m-1} |A|^{m-1} \frac{\cos^{m-1}\theta}{\sin^{2(m-1)}\theta},$$

$$v = \frac{3Ar}{\sin\theta}, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Используя граничные условия на внешней поверхности  $\theta = \beta$  и вводя обозначение

$$\omega(x,y) = \int_x^y \frac{\cos^{m+1}\theta}{\sin^{2m+1}\theta} d\theta, \quad (1)$$

будем иметь

$$A|A|^{m-1} = \frac{P_1 - P_2}{2k3^m \omega(\alpha, \beta)}.$$

Для компонентов напряжений и перемещения получаем

$$\sigma_\theta = -P_1 + (P_1 - P_2) \frac{\omega(\alpha, \theta)}{\omega(\alpha, \beta)}, \quad \sigma_r = -\frac{1}{2} (\sigma_\theta + \sigma_\varphi),$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta + \frac{P_1 - P_2}{\omega(\alpha, \beta)} \frac{\cos^m \theta}{\sin^{2m} \theta}, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

$$v = \frac{\text{sign}(P_1 - P_2)}{(2k)^{1/m}} \frac{|P_1 - P_2|^{1/m}}{\omega^{1/m}(\alpha, \beta)} \frac{r}{\sin \theta}.$$

Если совершить предельный переход  $\theta \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $r\theta = \rho = \text{const}$ , и перейти из сферической в цилиндрическую систему координат  $\rho t z$ , то  $\sigma_\theta(\theta)$  переходит в  $\sigma_\rho(\rho)$ ,  $\sigma_r$  - в  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\varphi(\theta)$  - в  $\sigma_t(\rho)$ ,  $v(\theta)$  - в  $u(\rho)$ . Радиусы внутренней и внешней цилиндрических поверхностей обозначим  $a$  и  $b$ ; полагая  $\alpha r \rightarrow a$ ,  $\beta r \rightarrow b$ , из (2)-(3) получаем

$$\sigma_\rho = -P_1 + \frac{P_1 - P_2}{\Omega} \left[ 1 - \left| \frac{a}{\rho} \right|^{2m} \right], \quad \sigma_z = -\frac{1}{2} (\sigma_\rho + \sigma_t),$$

$$\sigma_t = -\frac{1}{\Omega} \left[ P_1 \left| \frac{a}{b} \right|^{2m} - P_2 + (2m - 1)(P_1 - P_2) \left| \frac{a}{\rho} \right|^{2m} \right],$$

$$u = \left[ \frac{m(P_1 - P_2)}{k\Omega} \right]^{1/m} \frac{a^2}{\rho}, \quad \Omega = 1 - \left| \frac{a}{b} \right|^{2m}.$$

Формулы для напряженно-деформированного состояния цилиндрической трубы впервые получены А. Надаи [4] в 1922 г.

**2. Составная коническая труба.** Рассмотрим две конические трубы из одного и того же материала. Для первой (внутренней) трубы величины обозначаем с индексами  $i = 1$ , а для второй (внешней) -  $i = 2$ . Первая труба ограничена коническими поверхностями: внутренней поверхностью  $\theta = \alpha$  и внешней поверхностью  $\theta = \gamma$  (рис.1). Вторая труба ограничена внутренней  $\theta = \gamma - \delta$  и внешней  $\theta = \beta$  коническими поверхностями. Величина  $\delta > 0$ , угол натяга определяется в ходе рассмотрения задачи.

Нагреваем вторую трубу так, чтобы первая свободно входила в нее. После остывания получаем составную монолитную трубу с внутренней  $\theta = \alpha$  и внешней  $\theta = \beta$  коническими поверхностями. Между трубами возникает контактное давление  $p_*$ , величина которого также подлежит определению. Внутренний угол второго конуса увеличивается, а внешний угол первого уменьшается.

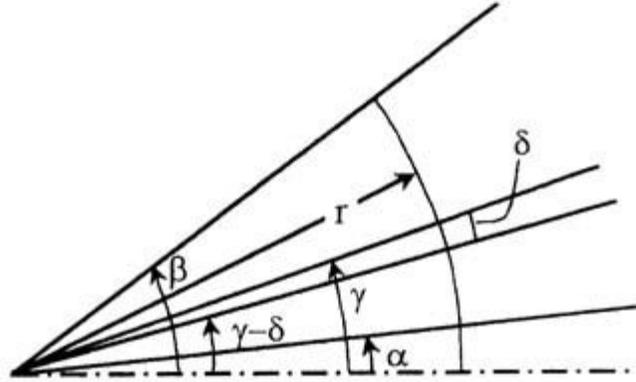


Рис 1.

Если коническая труба имеет внутренние и внешние конические поверхности соответственно  $\theta = x$  и  $\theta = y$ , напряженное состояние согласно (2) с рассмотренными внешними нагрузками представится в виде

$$\sigma_{\theta} = -p_1 + (p_1 - p_2) \frac{\omega(x, \theta)}{\omega(x, y)}, \quad \sigma_r = -\frac{1}{2} (\sigma_{\theta} + \sigma_{\varphi}),$$

$$\sigma_{\varphi} = -p_1 + (p_1 - p_2) \frac{\omega(x, \theta)}{\omega(x, y)} + \frac{p_1 - p_2}{\omega(x, y)} \frac{\cos^m \theta}{\sin^{2m} \theta}, \quad x \leq \theta \leq y. \quad (4)$$

Перемещение согласно (3) будет

$$v = \frac{\text{sign}(p_1 - p_2)}{(2k)^{1/m}} \frac{|p_1 - p_2|^{1/m}}{\omega^{1/m}(x, y)} \frac{r}{\sin \theta}, \quad x \leq \theta \leq y. \quad (5)$$

На контактной поверхности имеем условие совместимости перемещений

$$v_2(r, \gamma) - v_1(r, \gamma) = \Delta(r), \quad (6)$$

где  $\Delta(r)$  - неизвестный натяг, подлежащий определению.

Применяя формулу (5) для внешней трубы и полагая  $p_1 = p_*$  и  $p_2 = 0$ , а также  $x = \gamma$ ,  $y = \beta$  и  $\theta = \gamma$ , будем иметь

$$v_2(r, \gamma) = \frac{r}{\sin \gamma} \left( \frac{p_*}{2k} \right)^{1/m} \frac{1}{\omega^{1/m}(\gamma, \beta)}, \quad (7)$$

где  $p_*$  контактное давление между трубами после посадки.

Для первой трубы, полагая  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = p_*$ , а также  $x = \alpha$ ,  $y = \gamma$  и  $\theta = \gamma$ , из (5) находим

$$v_1(r, \gamma) = - \frac{r}{\sin \gamma} \left( \frac{p_*}{2k} \right)^{1/m} \frac{1}{\omega^{1/m}(\alpha, \gamma)}. \quad (8)$$

Подставляя выражения (7) и (8) в (6) и принимая  $\Delta(r) = \delta r$ , где  $\delta$  - пока неизвестный угол, характеризующий натяг конических труб, подлежащий определению, находим соотношение между контактным давлением и углом натяга:

$$p_* = 2k\delta^m \sin^m \gamma \frac{\omega(\alpha, \gamma)\omega(\gamma, \beta)}{\psi\omega(\alpha, \beta)}, \quad (9)$$

где

$$\psi = \frac{1}{\omega(\alpha, \beta)} [\omega^{1/m}(\alpha, \gamma) + \omega^{1/m}(\gamma, \beta)]^m. \quad (10)$$

Заметим, что при  $m = 1$  имеем  $\psi = 1$ .

**3. Напряжения в составной конической трубе.** Пусть рассматриваемая составная коническая труба находится под воздействием давления  $p$ . Полагая в (4)  $p_1 = p$ ,  $p_2 = 0$ ,  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ , получаем

$$\sigma_{\theta}^0 = -p \frac{\omega(\theta, \beta)}{\omega(\alpha, \beta)}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\varphi}^0 = \frac{p}{\omega(\alpha, \beta)} \left[ \frac{\cos^m \theta}{\sin^{2m} \theta} - \omega(\theta, \beta) \right], \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

где функции  $\omega(\theta, \beta)$  определяются согласно (1). Перемещение согласно (5) будет

$$v = \left( \frac{p}{2k} \right)^{1/m} \frac{1}{\omega^{1/m}(\alpha, \beta)} \frac{r}{\sin \theta}, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta. \quad (12)$$

В случае  $m = 1$  из (1) имеем

$$\omega(x,y) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{\cos y}{\sin^2 y} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{y}{2}}{x} \right). \quad (13)$$

Определим компоненты напряжения в зависимости от давления  $p_*$  для внутренней трубы: полагая в (4)  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = p_*$ , а также  $x = \alpha$ ,  $y = \gamma$  при  $\alpha \leq \theta \leq \gamma$ , получаем

$$\sigma_{\theta 1}^*(\theta) = -p_* \frac{\omega(\alpha, \theta)}{\omega(\alpha, \gamma)}, \quad \sigma_{\varphi 1}^*(\theta) = -\frac{p_*}{\omega(\alpha, \gamma)} \left[ \frac{\cos^m \theta}{\sin^{2m} \theta} + \omega(\alpha, \theta) \right]. \quad (14)$$

Для внешней трубы, полагая в (4)  $p_1 = p_*$ ,  $p_2 = 0$ , а также  $x = \gamma$  и  $y = \beta$ , находим при  $\gamma \leq \theta \leq \beta$

$$\sigma_{\theta 2}^*(\theta) = -p_* \frac{\omega(\theta, \beta)}{\omega(\gamma, \beta)}, \quad \sigma_{\varphi 2}^*(\theta) = \frac{p_*}{\omega(\gamma, \beta)} \left[ \frac{\cos^m \theta}{\sin^{2m} \theta} - \omega(\theta, \beta) \right]. \quad (15)$$

На рис.2 представлены компоненты напряжения (14)-(15) от контактного давления. Переходя от сферической системы координат  $r\theta\varphi$  к цилиндрической  $\rho t z$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ ,  $r\theta \rightarrow \rho = \text{const}$  из (14) при  $\alpha \leq \theta \leq \gamma$  получаем  $a \leq \rho \leq c$

$$\sigma_{\theta 1}^* \rightarrow \sigma_{\rho 1}^*(\rho) = -p_* \frac{1 - a^2/\rho^2}{1 - a^2/c^2}, \quad \sigma_{\varphi 1}^* \rightarrow \sigma_{t 1}^*(\rho) = p_* \frac{1 + a^2/\rho^2}{1 - a^2/c^2},$$

причем  $\alpha\gamma \rightarrow a$ ,  $\gamma\gamma \rightarrow c$ . Таким же путем из (15) при  $\gamma \leq \theta \leq \beta$  будем иметь  $c \leq \rho \leq b$

$$\sigma_{\theta 2}^* \rightarrow \sigma_{\rho 2}^*(\rho) = -p_* \frac{b^2/\rho^2 - 1}{b^2/c^2 - 1}, \quad \sigma_{\varphi 2}^* \rightarrow \sigma_{t 2}^*(\rho) = p_* \frac{b^2/\rho^2 + 1}{b^2/c^2 - 1},$$

где принято  $\beta\gamma \rightarrow b$ . Выражения  $\sigma_{\rho i}^*$  и  $\sigma_{t i}^*$  соответствуют формулам для цилиндрической трубы. Имеем также  $\sigma_{r i}^* \rightarrow \sigma_{z i}^*(\rho)$ .

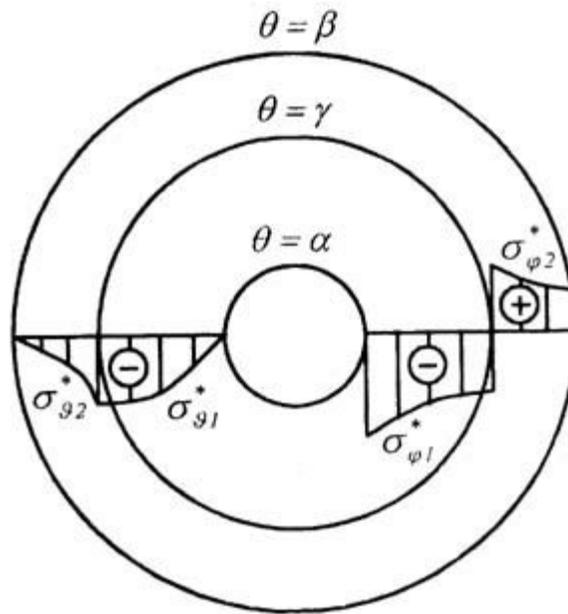


Рис 2.

В случае слабой нелинейности в законе упрочнения допускаем, что приближенно справедлив закон наложения напряженного состояния от воздействия  $p_*$  и  $p$ . Суммируя компоненты напряжения (14)-(15) с напряжениями (11), будем иметь

$$\tilde{\sigma}_{\theta i}(\theta) = \sigma_{\theta}^0(\theta) + \sigma_{\theta i}^*(\theta), \quad \tilde{\sigma}_{\phi i}(\theta) = \sigma_{\phi}^0(\theta) + \sigma_{\phi i}^*(\theta), \quad (16)$$

где  $\sigma_{\theta}^0$  и  $\sigma_{\phi}^0$  - напряжения от давления  $p$  в интервале  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , которые определяются согласно (11), а  $\sigma_{\theta i}^*$  и  $\sigma_{\phi i}^*$  - по формулам (14) и (15). Величины  $\tilde{\sigma}_{\theta i}$  и  $\tilde{\sigma}_{\phi i}$  являются суммарными напряжениями, где  $i = 1$  относится к интервалу  $\alpha \leq \theta \leq \gamma$ , а  $i = 2$  - к интервалу  $\gamma \leq \theta \leq \beta$ . Эти напряжения представлены на рис. 3 согласно формулам (16). Если перейти к пределу для цилиндрической трубы, в интервале  $\alpha \leq \theta \leq \gamma$  по-прежнему получим  $a \leq \rho \leq c$

$$\tilde{\sigma}_{\theta 1} \rightarrow \tilde{\sigma}_{\rho 1}(\rho) = -p \frac{b^2/\rho^2 - 1}{b^2/a^2 - 1} - p_* \frac{1 - a^2/\rho^2}{1 - a^2/c^2},$$

$$\tilde{\sigma}_{\phi 1} \rightarrow \tilde{\sigma}_{t 1}(\rho) = p \frac{b^2/\rho^2 + 1}{b^2/a^2 - 1} - p_* \frac{1 + a^2/\rho^2}{1 - a^2/c^2}.$$

В интервале ( $\gamma \leq \theta \leq \beta$ )  $a \leq \rho \leq b$  имеем

$$\tilde{\sigma}_{\theta 2} \rightarrow \tilde{\sigma}_{\rho 2}(\rho) = -p \frac{b^2/\rho^2 - 1}{b^2/a^2 - 1} - p_* \frac{b^2/\rho^2 - 1}{b^2/c^2 - 1},$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi 2} \rightarrow \tilde{\sigma}_{t 2}(\rho) = p \frac{b^2/\rho^2 + 1}{b^2/a^2 - 1} - p_* \frac{b^2/\rho^2 + 1}{b^2/c^2 - 1}.$$

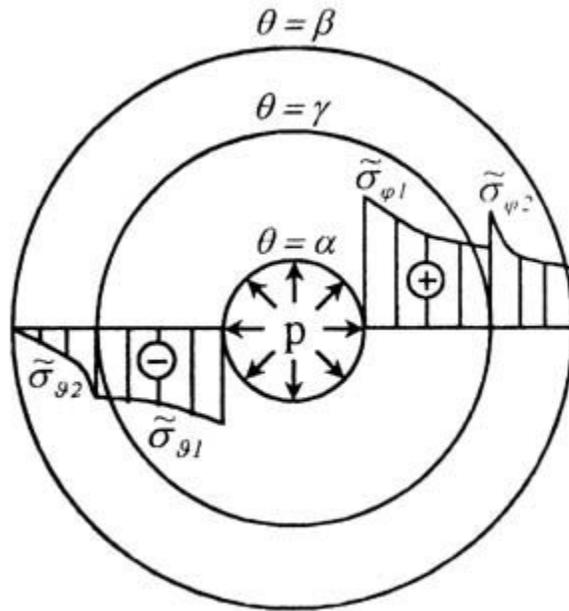


Рис 3.

Определим эквивалентные напряжения  $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_\varphi - \tilde{\sigma}_\theta$  на внутренней поверхности второй трубы:

$$\tilde{\sigma}_0(\alpha) = \left[ \frac{p}{\omega(\alpha, \beta)} - \frac{p_*}{\omega(\alpha, \gamma)} \right] \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha}, \quad (17)$$

$$\tilde{\sigma}_0(\gamma) = \left[ \frac{p}{\omega(\alpha, \beta)} + \frac{p_*}{\omega(\alpha, \gamma)} \right] \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma}. \quad (18)$$

Для равнопрочности составной трубы принимаем  $\tilde{\sigma}_0(\alpha) = \tilde{\sigma}_0(\gamma)$ . Получаем

$$p_* = \frac{p}{\omega(\alpha, \beta)} \left( \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha} - \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma} \right) \left[ \frac{1}{\omega(\gamma, \beta)} \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma} + \frac{1}{\omega(\alpha, \gamma)} \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha} \right]^{-1}. \quad (19)$$

Далее, исключая  $p_*$  из (19) и (9), а также используя (10), находим

$$\delta = \left( \frac{p}{2k} \right)^{1/m} \left\{ \frac{\left( \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha} - \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma} \right)^{1/m}}{\omega(\alpha, \gamma) \frac{\cos^m \gamma}{\sin^{2m} \gamma} + \omega(\gamma, \beta) \frac{\cos^m \alpha}{\sin^{2m} \alpha}} \right\} \frac{\omega^{1/m}(\alpha, \gamma) + \omega^{1/m}(\gamma, \beta)}{\omega^{1/m}(\alpha, \beta) \sin \gamma}. \quad (20)$$

Таким образом, при заданных значениях геометрических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и внутреннего давления  $p$  контактное давление  $p_*$  и  $\delta$  определяются по формулам (19) и (20).

**4. Минимум эквивалентного напряжения.** Подставляя значение  $p_*$  из (19) в (17), после преобразований получаем

$$\sigma_0(\alpha) = p \left[ \omega(\alpha, \gamma) \frac{\sin^{2m} \alpha}{\cos^m \alpha} + \omega(\gamma, \beta) \frac{\sin^{2m} \gamma}{\cos^m \gamma} \right]^{-1}. \quad (21)$$

Дифференцируя (21) по  $\gamma$  и приравнявая к нулю, находим

$$m \int_{\gamma}^{\beta} \frac{\cos^{m+1} \theta}{\sin^{2m+1} \theta} d\theta + \left( \frac{\sin^{2m} \alpha}{\cos^m \alpha} - \frac{\sin^{2m} \gamma}{\cos^m \gamma} \right) \frac{\cos^{2(m+1)} \gamma}{\sin^{4m} \gamma (1 + \cos^2 \gamma)} = 0. \quad (22)$$

Значение  $\gamma = \gamma_*(\alpha, \beta, m)$  определяется из (22) численным способом. В случае  $m = 1$  из (22) преобразованием получаем уравнение

$$\left( \cos \gamma + \frac{1}{\cos \gamma} \right) \left( \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\gamma} \right) - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \frac{\cos^3 \gamma}{\sin^4 \gamma} - 1 = 0, \quad (23)$$

определяющее значение  $\gamma_* = \gamma_*(\alpha, \beta)$ . На рис.4 представлена поверхность  $\gamma_* = \gamma_*(\alpha, \beta)$ , для которой  $\gamma$  принимает минимальное значение.

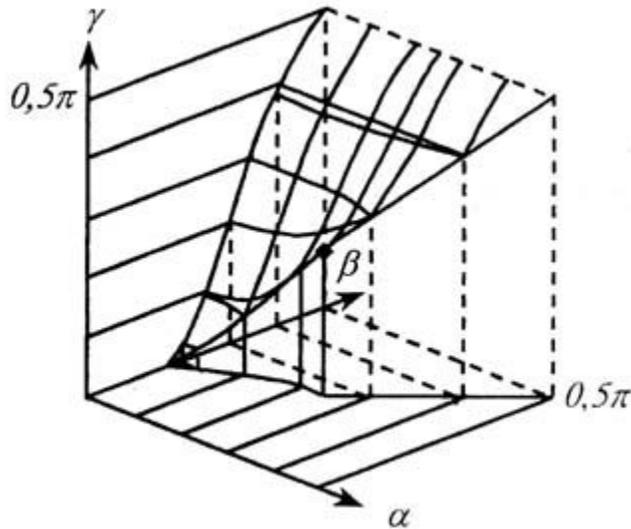


Рис 4.

Для малых значений  $\beta$  из (22) или (23)

$$\gamma = \sqrt{\alpha\beta}. \quad (24)$$

Умножая обе части этого уравнения на  $r$  и переходя к пределу  $\alpha r \rightarrow a$ ,  $\beta r \rightarrow b$ ,  $\gamma r \rightarrow c$ , из (24) приходим к формуле

$$c = \sqrt{ab}, \quad (25)$$

полученной еще Гадолиным для цилиндрических труб. Представляет интерес отношение

$$\frac{\sigma_0^{\min}(\alpha)}{\sigma_0^0(\alpha)} = \omega(\alpha, \beta) \frac{\sin^{2m}\alpha}{\cos^m\alpha} \left[ \omega(\alpha, \gamma_*) \frac{\sin^{2m}\alpha}{\cos^m\alpha} + \omega(\gamma_*, \beta) \frac{\sin^{2m}\gamma_*}{\cos^m\gamma_*} \right]^{-1}, \quad (26)$$

где  $\sigma_0^0(\alpha)$  - эквивалентное напряжение для однородной конической трубы  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ , определяющее меру снижения эквивалентного напряжения.

Полагая  $\alpha = 9^\circ$ ,  $\beta = 63^\circ$ , согласно рис.4 определяем  $\gamma_* = 56^\circ$ . Тогда, принимая  $m = 1$ , из (26) находим  $[(\sigma_0^{\min}(\alpha))/(\sigma_0^0(\alpha))] = 0,346$ .

Из (26) при  $m = 1$  переходя к пределу и используя (25), находим

$$\frac{\sigma_0^{\min}(\alpha)}{\sigma_0^0(\alpha)} \rightarrow \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{b} \right)$$

степень снижения эквивалентного напряжения для цилиндрической трубы.

Институт механики НАН РА

### Литература

1. Пономарьев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.Н. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. Машгиз. М. 1958. 975 с.
2. Феодосьев В.Н. Сопротивление материалов. М. Наука. 1972. 544 с.
3. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М. Наука. 1992. 384 с.
4. Надаи А. Пластичность. М. ОНТИ. 1936.

## Ակադեմիկոս Մ.Ա. Զադոյան

### Գաղղիինի խնդիրը կոնական խողովակների համար

Օգտագործելով Գաղղիինի գաղափարը՝ գլանային խողովակների ամրությամբ բարձրացնելու վերաբերյալ, ուսումնասիրվում է կոնական բաղադրյալ խողովակների լարվածային վիճակը՝ ներքին և արտաքին նորմալ ճնշումներից: Ելնելով բաղադրիչ կոնական խողովակների հավասար ամրության և էկվիվալենտ լարումների մինիմումի պայմաններից որոշվում է կոնտակտային կոնական մակերևույթի այն դիրքը, որը ապահովում է բաղադրյալ կոնական խողովակի լավագույն ամրությունը: Այդ միջանկյալ մակերևույթի դիրքը՝ ներքին և արտաքին մակերևույթների միջոցով որոշվում է ըստ նկ.4: Օգտագործելով լարումների բանաձևերը կոնական խողովակում ներքին և արտաքին ճնշումներից, սահուն անցումով ստացվում են համապատասխան լարումները աստիճանային օրենքով ամրապնդվող նյութից պատրաստված գլանային խողովակում՝ լարումների և տեղափոխումների բանաձևերի համար, որոնք ատացվել են դեռևս 1922 թ. Ա. Նադաիի կողմից: