

Ю.С. Сафарян, С.М. Погосян

**Аналитическое и численное решение конкретных задач
об узких пучках для электропроводящей магнитозвуковой
релаксирующей среды**

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.Г.Багдоевым 27/І 2002)

В работе [1] формулируется задача расчета нелинейных пучков в плазме, находящейся в поперечном магнитном поле, возникающая в связи с изучением выброса излучения из пульсаров. В ней получена упрощенная формула для безразмерного радиуса пучка на внешней поверхности пульсара. Кроме того задача о поперечном поле возникает и при изучении нагрева плазмы высокочастотными волнами в управляемых термоядерных реакциях [2]. В настоящей статье проводится численный расчет задачи без упрощающих предположений в уравнении для второй гармоники [1]. Получено восемь обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров пучка и дается их численный расчет для разных значений начальной амплитуды, кривизн волн, диссипации и дисперсии.

Предположим, что квазиплоская волна распространяется вдоль оси x . Оси координат y, z выбираются в плоскости невозмущенной волны, и

имеется осевая симметрия с радиальной координатой $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Обозначим через $\tau = \tau_1 - t$, $\tau_1 = [x/(C_n)]$ эйконал волны в линейной задаче, C_n - нормальная скорость линейной волны. Обозначим через $u = h_y$ возмущенное значение магнитного поля, H_y - невозмущенное поле. Тогда, как показано в [1], из уравнений магнитной газодинамики можно вывести эволюционное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau_1 \partial \tau} + \frac{1}{2} C_n^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{1}{C_n} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\Gamma u + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right), \quad (1)$$

где коэффициенты нелинейности Γ , диссипации D и дисперсии E имеют вид

$$\Gamma = \frac{C_n}{H_y} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \frac{C_s^2}{C_n^2} + \frac{3}{2} \frac{C_A^2}{C_n^2} \right), \quad E = \frac{\tau_0 (\gamma - 1)^2 \text{TK}}{C_n^2 2 \rho C_n^2}, \quad (2)$$

$$D = - \frac{1}{2 C_n} \left\{ - \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \right) \frac{C_A^2}{C_n^2} + \frac{(\gamma - 1)^2 \text{TK}}{\rho C_n^2} \right\}.$$

Обозначения указаны в [1,3],

$$C_A^2 = \frac{H_y^2}{4 \pi \rho}, \quad C_n^2 = C_s^2 + C_A^2, \quad (3)$$

$v_m = [(C^2)/(4 \pi \sigma)]$, C - скорость света, σ - электропроводность, C_s - скорость звука. Для остальных параметров имеет место

$$V_y = V_z = 0, \quad h_x = h_z = 0, \quad h_y = - \frac{H_y}{C_n} V_x, \quad \rho' = \frac{\rho}{C_n} V_x, \quad P' = C_s^2 \rho', \quad (4)$$

$V_{x,y,z}$ - компоненты скорости частиц.

Для случая квазимонохроматической волны с основной частотой α решение (1) можно искать в виде

$$u = \frac{1}{2} (u_1 e^{i\theta - \nu \tau_1} + u_2 e^{2i\theta - 2\nu \tau_1} + K. C.), \quad (5)$$

где $\theta = \alpha \tau - \omega \tau_1$, $u_k = u_k(\tau_1, r)$.

Как показано в [3,4], свободный член U_0 , который следовало бы добавить в (5), имеет для дифракционной задачи о пучках порядок U_1^3 и в силу малости может быть опущен. Вычисляя производные по τ_1, r в (5) и подставляя в (1), приравнявая линейные недифференцируемые члены с первой гармоникой, можно получить дисперсионное уравнение

$$\omega = -\frac{E}{C_n} \alpha^3, \quad v = -\frac{D}{C_n} \alpha^2. \quad (6)$$

Остальные члены с $e^{i\theta - v\tau_1}$ дают уравнение

$$i\alpha \frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} C_n^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = \frac{\Gamma}{2C_n} \alpha^2 u_1^* u_2, \quad (7)$$

где удержаны члены с второй гармоникой, звездочкой отмечено комплексно-сопряженное значение. Члены с $e^{2i\theta - 2v\tau_1}$ дают после учета (6)

$$\alpha(4vi - 12\omega)u_2 + 2i\alpha \frac{\partial u_2}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} C_n^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) = \frac{\Gamma \alpha^2}{C_n} u_1^2. \quad (8)$$

Полагая в (7), (8) для гауссовых пучков

$$u_k = a_k e^{i\varphi_k}, \quad a_k = A_k e^{-[(\tau^2)/(\tau_0^2 \varepsilon_k^2(\tau_1))]}, \quad \varphi_k = \sigma_k(\tau_1) + \frac{1}{2R_k(\tau_1)} r^2, \quad k=1,2, \quad (9)$$

где a_k - действительные амплитуды гармоник, r_0 - постоянный начальный радиус пучков, можно получить обыкновенные уравнения по переменной τ_1 от параметров пучка. Отделяя в этих уравнениях члены с r^0 и r^2 , затем разделяя действительные и мнимые части, получим обыкновенные дифференциальные уравнения.

Вводя безразмерные переменные, обозначенные штрихами

$$A_1 = KA'_1, \quad A_2 = KA'_2, \quad \tau_1 = \frac{1}{\alpha} \tau', \quad \cos(\sigma_2 - 2\sigma_1) = C, \quad \sin(\sigma_2 - 2\sigma_1) = S, \\ \frac{1}{R_1} = K'_1 \left(\frac{\alpha}{C_n} \right)^2, \quad \frac{1}{R_2} = K'_2 \left(\frac{\alpha}{C_n} \right)^2, \quad \frac{r_0^2}{C_n^2} \alpha^2 = r'_0{}^2, \quad v = \alpha v', \quad \omega = \alpha \omega' \\ e^{-2v'\tau'} = E', \quad \frac{\Gamma K}{C_n} = \Gamma', \quad \frac{1}{f_{1,2}^2} = F_{1,2}', \quad K = A_1(0), \quad (10)$$

можно получить следующие 8 уравнений:

$$\frac{d\sigma_1}{d\tau'} + \frac{2F_1}{r'_0{}^2} = -\frac{\Gamma'}{2} E' A'_2 C, \quad (11)$$

$$\frac{dA'_1}{d\tau'} + A'_1 K'_1 = -\frac{\Gamma'}{2} S A'_1 A'_2 E', \quad (12)$$

$$\frac{dK'_1}{d\tau'} - \frac{4}{r'_0{}^4} F_1{}^2 + K'_1{}^2 = \Gamma' E' A'_2 \left(\frac{C}{r'_0{}^2} F_2 + S \frac{K'_2 - 2K'_1}{2} \right), \quad (13)$$

$$\frac{1}{r'_0{}^2} \frac{dF_1}{d\tau'} + K'_1 \frac{2}{r'_0{}^2} F_1 = A'_2 \frac{\Gamma' E'}{2} \left(\frac{1}{r'_0{}^2} F_2 S - C \frac{K'_2 - 2K'_1}{2} \right), \quad (14)$$

$$2A'_2 \frac{d\sigma_2}{d\tau'} + 12\omega' A'_2 + \frac{2}{r'_0{}^2} A'_2 K'_2 = -\Gamma' A'_1{}^2 C, \quad (15)$$

$$2 \frac{dA'_2}{d\tau'} + 4v' A'_2 + 24G' A'_2 + A'_2 K'_2 = -\Gamma' A'_1{}^2 S, \quad (16)$$

$$A'_2 \frac{dK'_2}{d\tau'} + \frac{1}{2} A'_2 \left(\frac{4}{r_0'^2} F_2'^2 - K_2'^2 \right) = -\Gamma A'_2 \left[S \frac{2K'_1 - K'_2}{2} + \frac{-2F_1 + F_2}{r_0'^2} C \right], \quad (17)$$

$$2A'_2 \frac{1}{r_0'^2} \frac{dF_2}{d\tau'} + \frac{2A'_2 K'_2 F_2}{r_0'^2} = -\Gamma A'_2 \left[C \frac{2K'_1 - K'_2}{2} - S \frac{-2F_1 + F_2}{r_0'^2} \right]. \quad (18)$$

Уравнения (11)-(18) решаются при начальных условиях, следующих из значения решения для падающей волны в форме

$$\tau_1 = 0 \quad u_1 = K e^{-[(r^2)/(r_0^2)]} e^{-iat} e^{[(r^2)/(2R_1(0))]}$$

При этом уравнения (15), (17), (18) при $\tau_1=0$, если считать $A'_2(0)=0$, дают следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} C(0) = 0, \quad K'_2(0) - 2K'_1(0) = 0, \quad F_2(0) = 2F_1(0), \quad \sigma_2(0) = 2\sigma_1(0) + \frac{\pi}{2}, \\ \tau' = 0, \quad A'_1 = 0.1, \quad A'_2 = 0.01, \quad K'_1 = \frac{1}{R_0} \left(\frac{C_n}{\alpha} \right)^2, \quad K'_2 = 2 \frac{1}{R_0} \left(\frac{C_n}{\alpha} \right)^2, \\ F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученное по (6) значение ω или ω' , т.е. дисперсии за счет теплопроводности, весьма мало. Чтобы получить конечную дисперсию, можно использовать уточненное дисперсионное уравнение для плазмы [5], которое приводится к виду

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \omega_0^2 \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} \frac{C_A^2}{C_S^2 + C_A^2}, \quad \omega^0 = kC_n, \quad \Omega = \omega^0 + \omega,$$

где ω_0 - плазменная частота [5], k - волновое число,

$$\omega = -\frac{\omega_0^3}{2C_n^2} \frac{C^2}{\omega_0^2} \frac{C_A^2}{C_S^2 + C_A^2}.$$

Для случая большой дисперсии $|\omega\tau_1| \gg 1$ можно в (8) отбросить дифференцируемые члены с U_2 , при этом имеет место $|u_2| \ll |u_1|$, $|u_k| \ll |u_{k-1}|$ и получится

$$u_2 = \frac{\Gamma \alpha u_1^2}{4C_n(-3\omega + v i)}. \quad (20)$$

Уравнение (1) приводится к нелинейному уравнению Шредингера

$$i\alpha \frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} C_n^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 i) |u_1|^2 u_1, \quad (21)$$

где

$$\mathfrak{a}_1 = -3\omega\zeta, \quad \mathfrak{a}_2 = -v\zeta, \quad (22)$$

$$\zeta = \frac{\Gamma^2 \alpha^3}{8C_n^2} \frac{e^{-2v\tau_1}}{9\omega^2 + v^2}. \quad (23)$$

Отыскивая решение (21) в виде (9), можно получить соотношения

$$A_1 = \frac{b_1}{f_1}, \quad (24)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\tau_1} = -\frac{2C_n^2}{\alpha r_0^2 f_1^2} - \frac{b_1^2}{\alpha f_1^2}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\alpha}{C_n^2 f_1^2} \frac{df_1}{d\tau_1} + \frac{\alpha_2 b_1^2}{C_n^2 f_1^2}, \quad (26)$$

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau_1^2} = \frac{\xi}{f_1^3} + \frac{2\alpha_v b_1^2}{\alpha f_1}, \quad (27)$$

где

$$\xi = \alpha^{-2} (4C_n^4 r_0^{-4} + 4\alpha_1 b_1^2 C_n^2 r_0^{-2} - \alpha_2^2 b_1^4). \quad (28)$$

Таким образом в случае большой дисперсии получается уравнение (27), которое нужно решать при граничном условии, следующем из (26):

$$f_1(0) = 1, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau_1} = F, \quad F = \frac{C_n^2}{\alpha} \left(R_0^{-1} - \frac{\alpha_2}{C_n^2} b_1^2 \right). \quad (29)$$

При этом $\alpha_{1,2}$ является функцией от τ_1 . В случае малых $v\tau_1$ следует в правой части (27) отбросить второе слагаемое и считать $e^{-v\tau_1} = 1$, тогда (27), (28) интегрируется и дает формулу (2.15) из [6].

В переменных (10)

$$F_1^{-1} = (F'^2 + \xi') \left(\tau' + \frac{F'}{F'^2 + \xi'} \right)^2 + \frac{\xi'}{F'^2 + \xi'}, \quad (30)$$

где $F' = k'_1(0) - \alpha'_2$, $\xi' = [4/(r_0^4)] + \alpha'_1[4/(r_0^2)] - \alpha_2'^2$,

$$\alpha'_1 = -\frac{3\omega'}{8} \frac{\Gamma'^2 E'}{9\omega'^2 + (v' + 6)^2}, \quad \alpha'_2 = -(v' + 6) \frac{\Gamma'^2}{8} \frac{E'}{9\omega'^2 + (v' + 6)^2}. \quad (31)$$

Уравнения коротких волн для произвольной однородной среды получены в [7].

Рассмотрим расчет типичных задач для пульсаров [1], электролитов и термоядерных реакторов [2].

1. Для задачи о действии магнитного поля на пучок, распространяющийся от внутренней поверхности звезды, представляющей сферу радиуса $R_0[(\alpha)/(C_n)] = 10^6$ см при начальном радиусе пучка $r_0 = 10^4$ см, причем $C_n = 10^{10}$ см/с, $\alpha = 10^6$ 1/с [1], на основании (10) можно полагать $r'_0 = 2$, $K'_1 = [2/100]$, $K'_2 = [4/100]$, $\omega = [1/2] \cdot 10^{-3}$ 1/с. Кроме значения $v' = 0$ для звезды рассмотрены значения $v' = 0.03$ для электролитов, для которых $\sigma = 1.3 \cdot 10^7$ 1/с, $[(C_A)/(C_n)] = 1$, $C^2 = 10^{21}$ см²/с². Используя граничные условия (19), можно рассчитать (11)-(18) начиная от $x = 0$ до $x = 1$ или, поскольку на внешней границе $l = 10^5$ см, $\tau' = \alpha[l/(C_n)]$, интегрировать от $\tau' = 0$ до $\tau' = 20$. Значения F_1 , A'_1 , A'_2 приведены в таблице.

Для вычисления $F_1 = [1/(f_1^2)]$ по приближенной формуле (30) следует рассчитать $\omega = [1/2] \cdot 10^{-9}$, $v' = [1/2] \cdot 10^{-12}$, и поскольку дисперсия и диссипация весьма малы, полученная в предположении $|\omega[l/(C_n)]| \gg 1$ формула (30) в нелинейном варианте не пригодна, в линейном же случае при предположении $\alpha_{1,2} = 0$ она пригодна и при $\tau' = 20$ дает $f_1 = 10$, при этом из-за малой нелинейности (30) использована при $\alpha_{1,2} = 0$. Это значение совпадает с приведенным в таблице.

2. $C_n = 10^{10}$ см/с, $\alpha = 10^8$ 1/с. Тогда $r'_0 = 10^2$, $K'_1 = 10^{-4}$, $K'_2 = 2 \cdot 10^{-4}$. Кроме того $v' = 0$, $\omega = 0$, поэтому нелинейная формула (30) не применима. В линейном случае (30) дает $f_1 \approx 1.2$, что качественно согласуется с таблицей.

3. $C_n = 10^{10}$ см/с, $\alpha = 10^7$ 1/с. Расчеты по формулам (11)-(18) приведены в таблице. Нелинейная формула (30) снова не применима. Линейная формула (30) ($\alpha_{1,2} = 0$) дает при $\alpha[l/(C_n)] = 10^{-2}$, $f_1^2 = 5$, что согласуется с таблицей.

C_n	α	τ'	ν'	τ'_0	ω'	Γ'	A'_1	F_1	f_1^2	A'_2
10^{10}	$2 \cdot 10^6$	20	0	2	0	0.12	0.089	0.97×10^{-2}	1.03×10^2	-0.13×10^{-2}
10^{10}	10^8	10^3	0	10^2	0	0.12	0.9	0.8^1	1.3	-0.71×10^{-2}
10^{10}	10^8	10^3	0	10^2	0	$0.12 \cdot 10^{-1}$	0.83	0.68	1.47	0.11×10^{-1}
10^{10}	10^8	10^3	0	10^2	0	$0.12 \cdot 10^{-3}$	0.89	0.80	1.25	-0.13×10^{-2}
10^{10}	10^7	10^2	0.03	10	0	0.12	0.43	0.19	5.26	0.27×10^{-1}
10^{10}	10^7	10^2	0.03	10	0	$0.12 \cdot 10^{-3}$	0.44	0.19	5.26	0.28×10^{-3}
10^7	$2 \cdot 10^6$	20	0	2	$-\frac{1}{4000}$	0.12	0.98	0.96×10^{-2}	1.05	0.63×10^{-3}
10^7	10^7	10^2	0	10	$-\frac{1}{40}$	0.12	0.28	0.76×10^{-2}	17.6	-0.12×10^{-1}
10^7	10^7	10^2	0	10	$-\frac{1}{40}$	$0.12 \cdot 10^{-1}$	0.35	0.12	8.3	0.19×10^{-2}
10^7	10^7	10^2	0	10	$-\frac{1}{40}$	$0.12 \cdot 10^{-3}$	0.35	0.12	8.3	0.22×10^{-3}

Расчеты для термоядерной плазмы можно проводить по типичным значениям параметров, взятых из [2].

4. $C_n = 10^7$ см/с, $\alpha = 2 \cdot 10^6$ 1/с, $l = 10^2$ см, $r_0 = 10$ см, $r'_0 = 2$, $\sigma = 3 \cdot 10^{17}$ 1/с, $\nu' = [5/3]10^{-6}$, $\nu = [5/3]$. Кроме того начальная кривизна волны $[1/(R_0)][(C_n)/(\alpha)] = [1/(10^2)]$ 1/см. Тогда $F' = [1/10]$ 1/с, $\omega = -[1/4]10^3$ 1/с, $\omega' = -[1/4000]$. В формуле (30) $\alpha'_1 = 2$, $\alpha'_2 = 0$, $f_1(\alpha[l/(C_n)]) = 34$. По линейному варианту формулы (30), где $\alpha'_{1,2} = 0$, $f_1(\alpha[l/(C_n)]) = 10$, что близко к таблице. Последние три строки таблицы соответствуют значениям, приведенным в п.5.

5. $C_n = 10^7$ см/с, $\alpha = 10^7$ 1/с, при этом $\omega = -[1/4]10^6$ 1/с, $\omega' = -[1/40]$, $r'_0 = 10$, $[1/(R_0)][(C_n)/(\alpha)] = [1/(10^2)]$, $F' = [1/(10^2)]$. Поскольку $|[(\omega l)/(C_n)]| \gg 1$, формула (30) применима и расчеты по (30) дают $\xi' = 5 \cdot 10^{-4}$, $f_1^2([(\alpha l)/(C_n)]) = 7$. Линейный подход, при котором $\alpha'_{1,2} = 0$, дает $f_1^2([(\alpha l)/(C_n)]) = 6$.

Таблица согласуется также с расчетами звуковых пучков [8], проведенными для (1) при $E = 0$.

Граничные значения в формуле (19) для вариантов 1-3 дают $k'_1 = 10^{-6}[(C_n)/(\alpha)]$, $k'_2 = 2 \cdot 10^6[(C_n)/(\alpha)]$, а для вариантов 4, 5 $k'_1 = 10^{-2}[(C_n)/(\alpha)]$, $k'_2 = 2 \cdot 10^{-2}[(C_n)/(\alpha)]$.

Горисский филиал Государственного
инженерного университета Армении

Литература

1. Багдоев А.Г., Седракян Д.М. - Астрофизика. 2001. Т. 44. С. 139.
2. Голант В.Е. Жилинский Я.М., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. М. Атомиздат. 1977. 384 с.
3. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. - Акустический журнал. 1999. Т. 45. С. 149.
4. Багдоев А.Г., Петросян Л.Г. - Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. С.3.
5. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М. Атомиздат. 1964. 283 с.
6. Багдоев А.Г., Гургенян А.А. - Изв. АН АрмССР. Механика. 1986. Т. 39. С. 16.
7. Минасян М.М. - ДАН АрмССР. 1972. Т. 55. С. 123.
8. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М. Наука. 1982. 176с.

Յու. Ս. Սաֆարյան, Ս.Մ. Պողոսյան

Նեղ փնջերի մասին կոնկրետ խնդիրների անալիտիկ և թվային լուծումը Էլեկտրահաղորդիչ մագնիսաձայնային ռելաքսացվող միջավայրի համար

Դիտարկվում է ալիքների նեղ փնջերի հաշվարկման խնդիրը ռելաքսացվող պլազմայում, որը գտնվում է լայնական մագնիսական դաշտում: Ստացված են ութ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնց լուծումները դիտարկվում են առանց էական պարզեցումների: Արդյունքները կիրառված են էլեկտրոլիտների և պուլսարների համար, ինչպես նաև ջերմամիջուկային ռեակցիաների պլազմայի հաշվարկման խնդրում: