

Э.А. Мирзаханян

О некоторых свойствах классов $K_0 \subset K$ непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 26/III 2002)

Работа посвящена бесконечномерной алгебраической топологии вещественного гильбертова пространства H .

Допустимыми являются непрерывные отображения подмножеств из H , принадлежащие специальному классу K и его подклассу K_0 ; отображения этих классов кратко назовем K -отображениями и K_0 -отображениями, соответственно.

Ряд основных свойств K - и K_0 -отображений и их приложений содержатся, в частности, в [1-7].

1. *Допустимые классы отображений.* Пусть H - зафиксированное вещественное гильбертово пространство и G - его произвольное открытое подмножество.

Определение 1. Будем говорить, что непрерывное отображение $f : G \rightarrow H$ принадлежит классу K (относительно H) или является K -отображением, если выполнено условие:

(K) для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 , конечномерное подпространство $L \subset H$ и число λ такие, что если точки $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален L , то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Определение 2. Будем говорить, что непрерывное отображение $f : G \rightarrow H$ принадлежит классу K_0 (относительно H) или является K_0 -отображением, если выполнено условие:

(K_0) для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 , конечномерное подпространство $L \subset H$, числа λ и δ , $0 < \delta < [(\pi)/2]$, такие, что если точки $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $[(\pi)/2] - \delta$, то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Всякое K_0 -отображение является K -отображением и локально удовлетворяет условию Липшица: для каждой точки $x_0 \in G$ существуют такие числа $r = r(x_0) > 0$ и $c = c(x_0) > 0$, что если точки $x, y \in G$, $\|x - x_0\| < r$ и $\|y - x_0\| < r$, то $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$.

Обратно, K -отображение локально удовлетворяющее условию Липшица, будет K_0 -отображением [1,5].

Важным характеризующим свойством K - и K_0 -отображений является тот факт, что фигурирующее в условиях (K) и (K_0) число λ можно выбрать так, чтобы оно зависело лишь от точки x_0 , но не от числа $\varepsilon > 0$; в результате строится заданная на G единственная непрерывная вещественная функция $\lambda(x)$, которую называем терминальной производной отображения f и обозначаем через $\lambda_f(x)$. Композиция K_0 -отображений $g_1 : G_1 \rightarrow G_2$ и $g_2 : G_2 \rightarrow H$ есть K_0 -отображение и $\lambda_{g_2 \circ g_1}(x) = \lambda_{g_1}(x) \lambda_{g_2}(g_1(x))$ для каждой $x \in G_1$. Композиция двух K -отображений не всегда есть K -отображение.

Пусть теперь M - произвольное (не обязательно открытое) подмножество из H .

Будем говорить, что непрерывное отображение $f : M \rightarrow H$ является K - (соотв. K_0 -) отображением, если существует открытое в H множество $G \supset M$ и такое K - (соотв. K_0 -) отображение $g : G \rightarrow H$, что $f(x) = g(x)$ для каждой $x \in M$.

Каждое такое отображение g будем называть K - (соотв. K_0 -) продолжением отображения f .

Пусть теперь M и N - произвольные подмножества из H . Будем говорить, что непрерывное отображение $f : M \rightarrow N$ есть K - (соотв. K_0 -) отображение, если f , рассматриваемое как отображение M в H , т.е. композиция $i \circ f : M \rightarrow H$, есть K - (соотв. K_0 -) отображение, где $i : N \rightarrow H$ - вложение. Наконец гомеоморфизм $f : M \cong N$ называем K_0 -гомеоморфизмом, если оба отображения f и f^{-1} суть K_0 -отображения. Аналогичным образом определяется понятие K -гомеоморфизма.

2. Множества, допускающие терминальные производные и K_0 -терминальные производные.

Пусть M - произвольное (не обязательно открытое) подмножество из H .

Определение 3. Будем говорить, что K -отображение $f : M \rightarrow H$ обладает терминальной производной, если ограничения на M терминальных производных $\lambda_g(x)$ всех K -продолжений $g : G \rightarrow H$ отображения f совпадают между собой; получающуюся при этом заданную на M вещественную непрерывную функцию $\lambda_g(x)|_M$ назовем терминальной производной отображения f и обозначим через $\lambda_f(x)$.

Например, если M - линейное (векторное) подпространство H , то всякое K -отображение $f : M \rightarrow H$ будет обладать терминальной производной тогда и только тогда, когда M бесконечномерно.

Для приложений важны такие подмножества $M \subset H$, для которых всякое K -отображение $f : M \rightarrow H$ обладает терминальной производной.

Предложение 1. Пусть M подмножества из H ; рассмотрим условия:

a) для каждой точки $x_0 \in M$, каждой окрестности $U \subset M$ в M точки x_0 и для каждого конечномерного линейного подпространства L из H существует пара различных точек $x, y \in U$ такая, что вектор $(x - y) \perp L$, т.е. ограничение на U ортогонального проектора $p : H \rightarrow L$ не инъективно;

b) всякое K -отображение $f : M \rightarrow H$ обладает терминальной производной;

с) если K -отображения $g_i : G_i \rightarrow H$, $i = 1, 2$, совпадают между собой на M , то на M совпадают и их терминальные производные $\lambda_{g_1}(x)$ и $\lambda_{g_2}(x)$.

Тогда имеют место имплексации $a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow c$.

Замечание 1. Если $M \subset H$ удовлетворяет условию а) предложения 1, то и его замыкание $\overline{M}$ в H , всякое открытое в M подмножество $U \subset M$ также удовлетворяют условию а); наконец, объединение любого семейства подмножеств из H , удовлетворяющих условию а), также удовлетворяет условию а). В частности, если M удовлетворяет условию а), то таким же является и $Mx[0.1]$.

Определение 4. Множество $M \subset H$, удовлетворяющее условию а) предложения 1, назовем множеством, допускающим терминальные производные.

Лемма 1. Пусть $M \subset H$ множество, допускающее терминальные производные, $f : M \rightarrow H$ есть K -отображение.

Тогда для любой точки $x_0 \in M$, любого числа $\varepsilon > 0$ существует открытая в M окрестность $V \subset M$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что если точки $x, y \in V$ таковы, что $(x - y) \perp L$, то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Теорема 1. Пусть $M \subset H$ множество, допускающее терминальные производные, в частности открытое множество в H , $f : M \rightarrow H$ - K -отображение, а $X \subset M$ - компактное подмножество. Тогда для $\varepsilon > 0$ существуют открытое в M подмножество $U \supset X$ и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что если $x, y \in U$ таковы, что $(x - y) \perp L$, то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Теорема 2. Пусть $M \subset H$ множество, допускающее терминальные производные, $f : M \rightarrow H$ - K -отображение, а $X \subset M$ - такое компактное подмножество, на котором терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f всюду отлична от нуля. Тогда существует конечномерное подпространство $L \subset H$ такое, что

- 1) если f на X постоянно, то ортопроектор $p : H \rightarrow L$ инъективен на X , следовательно $\dim X < \infty$;
- 2) для каждой точки $x_0 \in X$ ограничение f на подмножестве $X \cap H_{x_0}$, есть гомеоморфизм, где $H_{x_0} = x_0 + L^\perp$, $L^\perp$ - ортогональное дополнение к L .

Лемма 2. Пусть G открыто в H , $g : G \rightarrow H$ есть K -отображение и $x_0 \in G$ такая, что $\lambda_f(x_0) \neq 0$. Тогда существует содержащаяся в G окрестность V конечного дефекта точки x_0 такая, что g на V есть гомеоморфизм. Следовательно, существует окрестность $U \supset V$ в G точки x_0 такая, что g (U) бесконечномерно.

Теорема 3. Пусть G открыто в H , X локальное компактное, в частности компактное подмножество из H , и $f : G \rightarrow H$ - замкнутое K -отображение. Пусть, далее, для точки $x_0 \in G$ существует такая ее окрестность U_0 в G , что $f(U_0) \subset X$. Тогда $\lambda_f(x_0) = 0$.

Предложение 2. Пусть $M \subset H$ множество, допускающее терминальные производные, и X – произвольное подмножество конечномерного линейного подпространства $L \subset H$. Пусть, далее, $f : M \rightarrow H$ есть K -отображение, а $x_0 \in M$ такая точка, у которой существует окрестность U в M такая, что $f(U) \subset X$. Тогда $\lambda_f(x_0) = 0$. В частности, если $f(M) \subset X$, то $\lambda_f(x_0) = 0$ на M .

Замечание 2. Важен тот факт, что если множество $M \subset H$ обладает тем свойством, что для каждой точки $x_0 \in M$ любая ее окрестность U в M бесконечномерна, то M является множеством, допускающим терминальные производные.

Важными примерами множеств M , допускающими терминальные производные, являются каждое из нижеследующих множеств:

1. бесконечномерные линейные подпространства $M \subset H$, открытые и канонически замкнутые в M множества, в частности, бесконечномерные открытые и замкнутые шары;

2. множество M , для каждой точки $x_0 \in M$ которого существует окрестность в M точки x_0 , гомеоморфная открытому множеству бесконечномерного линейного подпространства из H , в частности, гильбертовы многообразия $M \subset H$, моделью для которых служат бесконечномерные линейные подпространства из H ;

3. гильбертов куб Q и Q -многообразия, т.е. такие подмножества $M \subset H$, для которых каждая точка $x_0 \in M$ обладает окрестностью в M , гомеоморфной открытому подмножеству из Q . Пусть M – произвольное подмножество H .

Определение 5. Скажем, что K_0 -отображение $f : M \rightarrow H$ обладает K_0 -терминальной производной, если терминальные производные $\lambda_g(x)$ всех K_0 -продолжений $g : G \rightarrow H$ отображения f совпадают между собой на M ; получающуюся непрерывную единственную вещественную функцию $\lambda_g(x)|_M$ назовем K_0 -терминальной производной отображения f и обозначим через $\lambda_f^0(x)$. Отметим, что если M – множество, допускающее терминальные производные, то для K_0 -отображений $f : M \rightarrow H$ терминальные производные $\lambda_f(x)$ и $\lambda_f^0(x)$ совпадают.

Предложение 3. Для подмножества $M \subset H$ рассмотрим условия:

a_0) для каждой точки $x_0 \in M$, каждой ее окрестности $U \subset M$ в M , каждого подпространства $L \subset H$ и каждого числа $0 < \delta < [(\pi)/2]$ существует пара различных точек $x, y \in U$ такая, что угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $[(\pi)/2] - \delta$;

b_0) каждое K_0 -отображение $f : M \rightarrow H$ обладает K_0 -терминальной производной;

c_0) если K_0 -отображения $g_1 : G_1 \rightarrow H$ и $g_2 : G_2 \rightarrow H$ совпадают на M , то на M совпадают и их K_0 -терминальные производные. Тогда имеют место импликации: $a_0 \rightarrow c_0 \rightarrow b_0 \rightarrow c_0$.

Замечание 3. Факты, указанные в замечании 1, остаются справедливыми для множеств M , удовлетворяющих условию a_0) предложения 3.

Определение 6. Множество $M \subset H$, удовлетворяющее условию a_0) предложения 3, будем называть множеством, допускающим K_0 -терминальные производные.

Справедливы аналоги леммы 1, теоремы 1 и 2 и предложения 2, если множество M ,

допускающее терминальные производные, заменить множеством, допускающим K_0 -терминальные производные, K -отображение - K_0 -отображением, а $\lambda_f(x_0)$ - на $\lambda_f^0(x_0)$. В частности имеет место утверждение:

Предложение 4. Пусть $M \subset H$ - множество, допускающее K_0 -терминальные производные, $f : M \rightarrow H$ - K_0 -отображение, $X \subset M$ - компактное подмножество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое в M подмножество $U \supset X$, конечномерное подпространство $L \subset H$, число δ , $0 < \delta < [(\pi)/2]$, такие, что если точки $x, y \in U$, $x \neq y$ и угол между вектором $x - y$ и L не меньше $[(\pi)/2] - \delta$, то

$$\| f(x) - f(y) - \lambda_f^0(x)(x - y) \| \leq \varepsilon \| x - y \| .$$

3. *Множества со свойствами терминальной и K_0 -терминальной производной.* Пусть $M \subset H$ - произвольное подмножество H .

Определение 7. Множество M , удовлетворяющее условию с), значит и b), (соотв. c_0), значит и b_0) (см. предложения 1, 3), будем называть множеством со свойством терминальной (соотв. K_0 -терминальной) производной.

Легко проверить, что если M содержит всюду плотное подмножество M_0 (в частности $M = \overline{M}_0$, удовлетворяющее с) (соотв. c_0), то таким же будет M ; объединение любого семейства множеств, удовлетворяющих с) (соотв. c_0), также удовлетворяет с) (соотв. c_0). Наконец если M удовлетворяет с) (соотв. c_0), то таким будет и $M \times [0,1]$.

Отметим, что если M - множество, допускающее терминальные производные, то для него c_0) и с) равносильны.

Предложение 5. Пусть M_1 и M_2 - множества со свойством K_0 -терминальной производной, а $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$, $f_2 : M_2 \rightarrow H$ - K_0 -отображения. Тогда имеет место

$$\lambda_{f_2 \circ f_1}^0(x) = \lambda_{f_1}^0(x) \lambda_{f_2}^0(f_1(x)) \text{ для } x \in M_1.$$

Предложение 6. Пусть M - множество со свойством K_0 -терминальной производной, $f : M \rightarrow N$ сюръективное K_0 -отображение, K_0 -терминальная производная $\lambda_f^0(x)$ которого тождественно не равна нулю на прообразе $f^{-1}(y)$ для каждой точки $y \in N$. Тогда N будет множеством со свойством K_0 -терминальной производной.

Теорема 4. *Свойство K_0 -терминальной производной является K_0 -топологическим инвариантом, т.е. если из K_0 -гомеоморфных множеств одно - множество со свойством K_0 -терминальной производной, то и другое будет таким же. При этом если $f : M \cong N$ - K_0 -гомеоморфизм, то*

$$\lambda_f^0(x) = \frac{1}{\lambda_{f^{-1}}^0(f(x))} \text{ для } x \in M.$$

Предложение 7. Пусть $M \subset N$ - множество со свойством K_0 -терминальной производной, $f : M \rightarrow N$ такое K_0 -отображение (называемое K_0z -отображением), для которого существует K_0 -отображение $g : N \rightarrow M$ такое, что $f \circ g = 1_N$. Тогда N будет множеством со свойством K_0 -терминальной производной тогда и только тогда, когда $\lambda_f^0(g(y)) \neq 0$ для каждой $y \in N$; в частном случае, когда f есть K_0 -ретракция, а значит g -вложение N в M , соответственно $\lambda_f^0(x) = 1$ для каждой $x \in N$.

Замечание 4. Можно доказать, что свойство $M \subset N$ быть множеством со свойством терминальной производной сохраняется при K -гомеоморфизмах.

Ереванский государственный университет

Литература

1. Болтянский В.Г. - Изв. АН АрмССР. Математика. 1974. Т.9. N 2. С. 107-120.
2. Болтянский В.Г., Мирзаханян Э.А. - Изв. АН АрмССР. Математика. 1974. Т.9. N 5. С. 374-386.
3. Мирзаханян Э.А. - Изв. АН АрмССР. Математика. 1980. Т.15. N 5. С. 349-356.
4. Мирзаханян Э.А. - Уч. зап. ЕГУ. 1990. N 3. С. 21-28.
5. Мирзаханян Э.А. - Уч. зап. ЕГУ. 1991. N 1. С. 3-10.
6. Мирзаханян Э.А. - Изв. НАН РА. Математика. 1998. Т.33. N 6. С. 10-27.
7. Мирзаханян Э.А. - Изв. вузов. Математика. Казань. 1991. N 3. С. 29-35.

Է.Ա. Միրզախանյան

Հիլբերթյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների $K_0 \subset K$ դասերի որոշ հատկությունների մասին

Հոդվածը նվիրված է իրական հիլբերթյան H տարածության անվերջ չափանի հանրահաշվական տոպոլոգիայի կառուցմանը:

Թույլատրելի են հանդիսանում H տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների հատուկ $K_0 \subset K$ դասերը: Այդ դասերին պատկանող արտապատկերումները անվանում են K_0 - և K -արտապատկերումներ:

Բերվում են K_0 - և K -արտապատկերումների սահմանումները և նրանց որոշ անհրաժեշտ տեղեկություններ: Այդ դասերի հիմնական հատկությունների մի շարք պարունակում են [1-7]-ում:

Սահմանվում են H տարածության ենթաբազմությունների դասեր և ապացուցվում այդ բազմությունների վրա տրված K_0 - և K -արտապատկերումների մի շարք հատկություններ:

Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են՝ թեորեմներ 1-4, լեմմա 2: