ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 102 2002 № 4

ФИЗИКА

УДК 539.182

А. М. Ишханян

Решения трехуровневой задачи в обобщенных гипергеометрических функциях ${}_3F_2$

(Представлено академиком Д.М. Седракяном 23/IV 2002)

1. Аналитические решения временных уравнений Шредингера сыграли важную роль в изучении ряда проблем теории когерентного взаимодействия излучения с веществом. Яркими примерами являются знаменитые решения Ландау - Зинера [1] и Розена - Зинера [2], полученные еще на заре квантовой механики. С помощью этих решений были исследованы вопросы пересечения термов и эффекты, обусловленные формой импульсов, т.е. принципиальные аспекты проблемы неадиабатических переходов в квантовых системах. Хорошо известными последующими примерами являются решения Бамбини - Бермана [3] и Кэрроля - Хью [4], полученные в 80-х гг. XX столетия и сыгравшие в свое время роль возмутителей спокойствия, стимулировав появление некоторых нетрадиционных результатов, приведших к качественно новым взглядам на определенные вопросы квантовой оптики. Важно, однако, что аналитические решения не утратили свою роль и на современном этапе развития атомной и молекулярной физики. Подтверждением тому является ряд эффектов, обнаруженных совсем недавно именно благодаря подобным точным решениям. К их числу следует отнести и, например, эффект сужения нецелого порядка интерференционных краев картины дифракции атомов на стоячей волне [5], новую трактовку механизма STIRAP-а (вынужденного адиабатического Рамановского перехода) в трехуровневых системах [6] и др.

В свете сказанного вопрос об аналитической интегрируемости временных уравнений Шредингера для простых квантовых систем обретает достаточно широкий теоретический интерес. Следует сказать, что вопрос этот математически довольно сложен и требует интенсивных исследований. Нами доказана общая теорема о классовом свойстве решений [7] и получен ряд новых решений двухуровневой [8] и трехуровневой [9] задач. Именно эти решения послужили основой для выявления вышеуказанных эффектов [5-6].

Следует отметить, однако, что с точки зрения применимости к конкретным физическим задачам полученные решения обладают различными потенциалами. Как показала практика, решения трехуровневых задач оказали гораздо большее влияние на исследование конкретных вопросов, чем аналогичные решения для двухуровневых систем. Естественно, это в первую очередь обусловлено тем, что физика трехуровневых систем объективно намного более богата, чем физика простейших двухуровневых атомов. По этой причине аналитические решения трехуровневой задачи, несомненно, представляют больший практический интерес. И поэтому в настоящей работе мы проводим последовательный поиск решений трехуровневой задачи.

Исходным пунктом служит то обстоятельство, что все известные к настоящему времени решения трехуровневой задачи выражаются в обобщенных гипергеометрических функциях. Так как трехуровневая задача в общем случае может быть сформулирована в виде определенного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, то следует искать решения, выражающиеся в гипергеометрических функциях $_1F_2$, $_2F_2$, и $_3F_2$ (так как только эти гипергеометрические функции подчиняются уравнениям третьего порядка). Поскольку при этом наиболее гибкими являются функции $_3F_2$ (они содержат пять свободных параметров), то мы здесь концентрируем наше внимание именно на решениях, выражающихся в этих функциях. Применяя метод поиска интегрируемых случаев, развитый в [7-9], мы обобщаем все известные в настоящее время решения в функциях $_3F_2$ и получаем ряд новых классов решений. Суммарно мы представляем здесь 12 бесконечных классов интегрируемых случаев трехуровневой задачи. Предыдущий опыт позволяет надеяться, что приведенные решения сыграют полезную роль в изучении различных задач квантовой оптики и атомной физики.

2. Временные уравнения Шредингера для трехуровневой квантовой системы, подверженной воздействию двух квазирезонансных волн, имеют вид [10]

$$\begin{aligned} ia_{1t} &= Ue^{-i\delta_1}a_2, \\ ia_{2t} &= Ue^{+i\delta_1}a_1 + Ve^{-i\delta_2}a_3, \\ ia_{3t} &= Ve^{+i\delta_2}a_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{1,2,3}$-амплитуды населенностей уровней, U, V - частоты Раби и $\delta_{1,2}$ - расстройки соответствующих частот полей от атомных. Исключив $a_{2,3}$ из этой системы, можно записать задачу в виде обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$\begin{aligned} a_{1ttt} + \left(2i\delta_{1t} - 2\frac{U_t}{U} + i\delta_{2t} - \frac{V_t}{V}\right)a_{1tt} + \left[\left(i\delta_{1t} - \frac{U_t}{U}\right)_t + U^2 + V^2 + \right. \\ \left. + \left(i\delta_{1t} - \frac{U_t}{U}\right)\left(i\delta_{1t} - \frac{U_t}{U} + i\delta_{2t} - \frac{V_t}{V}\right)\right]a_{1t} + U^2\left(i\delta_{1t} + \frac{U_t}{U} + i\delta_{2t} - \frac{V_t}{V}\right)a_1 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Нашей задачей является нахождение таких действительных функций $U(t), V(t) > 0$ и $\delta_{1,2}(t)$, для которых возможно заменой зависимой и независимой переменных

$$u = \varphi(z)a_1(z), \quad z = z(t) \tag{3}$$

свести уравнение (2) к уравнению

$$u_{zzz} + \frac{f_1 z + f_0}{z(1-z)}u_{zz} + \frac{g_1 z + g_0}{z^2(1-z)}u_z + \frac{h_1 z + h_0}{z^3(1-z)}u = 0. \tag{4}$$

Как известно, общее решение последнего уравнения задается с помощью обобщенных гипергеометрических функций от пяти параметров $_3F_2$ [11]

$$u = \sum_{m=1}^{3} C_m z^{\eta_m} \cdot {}_3F_2(\eta_m - \xi_1, \eta_m - \xi_2, \eta_m - \xi_3; 1 + \eta_m - \eta_{m+1}, 1 + \eta_m - \eta_{m+2}; z), \tag{5}$$

где $C_{1,2,3}$ - произвольные постоянные, а параметры $\eta_{1,2,3}$ и $\xi_{1,2,3}$ определяются из следующих кубических характеристических уравнений

$$\eta(\eta-1)(\eta-2)+f_0\eta(\eta-1)+g_0\eta+h_0=0, \tag{6}$$

$$\xi(\xi-1)(\xi-2)-f_1\xi(\xi-1)-g_1\xi-h_1=0. \tag{7}$$

Согласно общему подходу [7-9], следует переписать уравнение (2), заменив всюду переменное t на z, и приравнять коэффициенты полученного уравнения и уравнения (4), предварительно преобразованного первой заменой (3). Далее, если функции $U^*(z), V^*(z)$ и $\delta^*_{1,2}(z)$ (называемые базисными решениями) представляют собой решения полученной системы уравнений, то, согласно классовому свойству решений, функции $U(t), V(t)$ и $\delta_{1,2}(t)$, определенные соотношениями

$$U(t)=U^*(z)\frac{dz}{dt}, \quad V(t)=V^*(z)\frac{dz}{dt}, \quad \frac{d\delta_{1,2}(t)}{dt}=\delta^*_{1,2z}(z)\frac{dz}{dt}, \tag{8}$$

составляют класс функций, для которых решение исходной трехуровневой задачи выражается в обобщенных гипергеометрических функциях по формуле (5). Здесь $z = z(t)$ - любая физически разумная комплекснозначная функция действительной переменной t - времени, определяющая взаимно однозначное отображение $t \to z$.

Следуя нашей предыдущей работе [9], будем искать базисные решения в виде

$$U^*=U^*_0 z^{k_1}(1-z)^{n_1}, \quad V^*=V^*_0 z^{k_2}(1-z)^{n_2}, \quad \delta^*_{1,2z}=\frac{\beta_{1,2}}{z}+\frac{\gamma_{1,2}}{1-z}. \tag{9}$$

Если ограничиваться простейшим случаем $\varphi(z) = 1$, то определяющие уравнения будут иметь вид

$$\frac{2i\beta_1+i\beta_2-2k_1-k_2}{z}+\frac{2i\gamma_1+i\gamma_2+2n_1+n_2}{1-z}=\frac{f_0+f_1z}{z(1-z)}.$$
$$\left(-\frac{i\beta_1-k_1}{z^2}+\frac{i\gamma_1+n_1}{(1-z)^2}\right)+U_0^{*2}\cdot z^{2k_1}\cdot(1-z)^{2n_1}+V_0^{*2}\cdot z^{2k_2}\cdot(1-z)^{2n_2}+$$
$$+\left(\frac{i\beta_1-k_1}{z}+\frac{i\gamma_1+n_1}{1-z}\right)\left(\frac{i\beta_1+i\beta_2-k_1-k_2}{z}+\frac{i\gamma_1+i\gamma_2+n_1+n_2}{1-z}\right)=\frac{g_0+g_1z}{z^2(1-z)},$$
$$U_0^{*2}\cdot z^{2k_1}(1-z)^{2n_1}\cdot\left(\frac{i\beta_1+i\beta_2+k_1-k_2}{z}+\frac{i\gamma_1+i\gamma_2-n_1+n_2}{1-z}\right)=\frac{h_0+h_1z}{z^3(1-z)}. \tag{10}$$

Из первого уравнения этой системы имеем

$$\begin{aligned} f_0 &= 2i\beta_1+i\beta_2-2k_1-k_2, \\ f_1+f_0 &= 2i\gamma_1+i\gamma_2+2n_1+n_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Остальные два уравнения дают

$$\begin{aligned} g_0 &= (i\beta_1-k_1)(i\beta_1+i\beta_2-k_1-k_2-1)+\left[\left(U^{*2}+V^{*2}\right)z^2\right]_{z=0}, \\ g_1+g_0 &= (i\beta_1-k_1)(i\gamma_1+i\gamma_2+n_1+n_2)+(i\gamma_1+n_1)(i\beta_1+i\beta_2-k_1-k_2)+ \\ &\quad+\left[\left(U^{*2}+V^{*2}\right)(1-z)\right]_{z=1} \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned} h_0 &= \left(U^{*2}z^2\right)_{z=0}(i\beta_1+i\beta_2+k_1-k_2), \\ h_1+h_0 &= \left(U^{*2}\right)_{z=1}(i\gamma_1+i\gamma_2-n_1+n_2)+\left[U^{*2}(1-z)\right]_{z=1}(i\beta_1+i\beta_2+k_1-k_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Кроме того, структура уравнений (10) накладывает ряд ограничений на параметры задачи. Прежде всего, легко показать, что должно быть $k_{1,2}, n_{1,2} \geq -1$ и $k_{1,2} + n_{1,2} < 0$. Далее доказывается, что $n_1 \neq -1$ и $k_1 \neq 0$. Наконец, необходимость исключить во втором уравнении (10) член, пропорциональный $1/(1-z)^2$, приводит к следуюшим соотношениям:

$$\begin{gathered}[(U^{*2}+V^{*2})(1-z)^2]_{z=1}+(i\gamma_1+n_1)(i\gamma_1+i\gamma_2+n_1+n_2+1)=0,\\ \left(U^{*2}+V^{*2}\right)\sim\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z(1-z)}+\frac{C}{(1-z)^2}.\end{gathered}\tag{14}$$

где A, B и C - произвольные постоянные. Дальнейшее изучение всевозможных вариантов с учетом перечисленных ограничении приводит нас окончательно к двенадцати независимым

N	k_1	n_1	k_2	n_2	U^*	V^*	$\delta^*_{1z}, \delta^*_{2z}$	Ограничения
1	−1	−1/2	−1	−1/2	$\frac{U_0^*}{z\sqrt{1-z}}$	$\frac{V_0^*}{z\sqrt{1-z}}$	$\frac{\beta_1}{z}\pm\frac{\gamma_1}{1-z}$	$\gamma_1+\gamma_2=0$
2	−1	−1/2	−1/2	−1/2	$\frac{U_0^*}{z\sqrt{1-z}}$	$\frac{V_0^*}{\sqrt{z(1-z)}}$	$\frac{\beta_1}{z}\pm\frac{\gamma_1}{1-z}$	$\gamma_1+\gamma_2=0$
3	−1	0	−1	−1	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{\sqrt{\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)}}{z(1-z)}$	$\frac{\beta_{1,2}}{z}+\frac{\gamma_{1,2}}{1-z}$	$V_0^{*2}=\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)$
4	−1	0	−1/2	−1	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{\sqrt{\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)}}{\sqrt{z}(1-z)}$	$\frac{\beta_{1,2}}{z}+\frac{\gamma_{1,2}}{1-z}$	$V_0^{*2}=\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)$
5	−1	0	0	−1	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{\sqrt{\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)}}{1-z}$	$\frac{\beta_{1,2}}{z}+\frac{\gamma_{1,2}}{1-z}$	$V_0^{*2}=\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)$
6	−1	0	−1	−1/2	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{V_0^*}{z\sqrt{1-z}}$	$\frac{\beta_1}{z}, \frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2}{1-z}$	$\gamma_1=0$
7	−1	0	−1	0	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{V_0^*}{z}$	$\frac{\beta_1}{z}, \frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2}{1-z}$	$\gamma_1=0$
8	−1	0	−1/2	−1/2	$\frac{U_0^*}{z}$	$\frac{V_0^*}{\sqrt{z(1-z)}}$	$\frac{\beta_1}{z}, \frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2}{1-z}$	$\gamma_1=0$
9	−1/2	−1/2	−1	−1/2	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z(1-z)}}$	$\frac{V_0^*}{z\sqrt{(1-z)}}$	$\frac{\beta_{1,2}}{z}\pm\frac{\gamma_1}{1-z}$	$\gamma_1+\gamma_2=0$
10	−1/2	−1/2	−1/2	−1/2	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z(1-z)}}$	$\frac{V_0^*}{\sqrt{z(1-z)}}$	$\frac{\beta_{1,2}}{z}\pm\frac{\gamma_1}{1-z}$	$\gamma_1+\gamma_2=0$
11	−1/2	0	0	−1/2	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z}}$	$\frac{U_0^*}{\sqrt{1-z}}$	$\frac{\beta_1}{z}, \frac{\beta_2}{z}+\frac{\beta_1+\beta_2}{1-z}$	$V_0^*=U_0^*$, $\gamma_1=0, \gamma_2=\beta_1+\beta_2$
12	−1/2	0	−1	+1/2	$\frac{U_0^*}{\sqrt{z}}$	$\frac{U_0^*\sqrt{1-z}}{z}$	$\frac{\beta_1}{z}, \frac{\beta_2}{z}+\frac{\beta_1+\beta_2}{1-z}$	$V_0^*=U_0^*$, $\gamma_1=0, \gamma_2=\beta_1+\beta_2$

базисным решениям. Эти функции вместе с необходимыми ограничениями, налагаемыми на параметры задачи, представлены в таблице, Представление о характерных представителях соответствующих классов можно получить, применив стандартное преобразование $z = (1+\tanh t)/2$.

Данные классы содержат в себе все известные в настоящее время модели трехуровневой задачи, интегрируемые в обобщенных гипергеометрических функциях ${}_3F_2$. Более того, как правило, наши классы представляют собой обобщения ранее известных решений. Так, например, 5-й из приведенных классов является обобщением решения Лайне - Стенхолма [12] на случай ненулевых расстроек, а 6-й и 9-й суть обобщения двух семейств, представленных в [9]. Ранее были целиком известны лишь 10-й класс, в точности совпадающий с классом Кэрроля - Хью [4], и 11-й класс, который был представлен нами совсем недавно в работе [6]. Остальные приведенные классы получены впервые.

Таким образом, мы провели поиск новых аналитически интегрируемых случаев трехуровневой задачи и нашли 12 бесконечных классов решений в обобщенных гипергеометрических функциях ${}_3F_2$. Некоторые из этих классов представляют собой существенные обобщения ранее известных моделей, большинство же - новые решения. Полученные модели могут быть применены для исследования ряда конкретных физических задач квантовой и атомной оптики. Например, обобщенный 5-й класс может быть использован для изучения вопросов неоднократного пересечения термов в многоуровневых системах,

В заключение отметим, что вышеприведенный анализ без труда может быть проведен и в применении к другим уравнениям, например, к уравнениям, которым подчиняются обобщенные гипергеометрические функции ${}_1F_2$ и ${}_2F_2$.

Работа выполнена при поддержке грантов Фонда Гражданских Исследований и Разработок No NFSAT PH 100-02/12042 Международного Научно-Технического Центра No. A-215-99 и PA No. 2002-0591.

Инженерный центр НАН РА

Ա. Մ. Իշխանյան

Եռամակարդակ խնդրի լուծումները ${}_3F_2$ ընդհանրացված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաներով

Դիտարկված է եռամակարդակ խնդրի անալիտիկ ինտեգրման հարցը՝ Շրյոդինգերի ժամանակային հավասարումները ${}_3F_2$ ընդհանրացված հիպերերկրաչափական ֆունկցիաների կողմից բավարարվող երրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարմանը բերելու միջոցով: Գտնված է այդ ֆունկցիաներով ինտեգրվող մոդելների ընդհանուր առմամբ 12 անսահման դաս, որոնց մեծամասնությունը նոր է, իսկ մնացյալները հանդիսանում են նախկինում հայտնի մոդելների ընդհանրացումներ:

Литература

1. *L.D. Landau.* Phys. Z. Sovjetunion, 2, 46 (1932); C. Zener. Proc. Roy. Soc. (London), ser. A, 137, 696 (1932).
2. *N. Rosen, C. Zener.* Phys. Rev., 40, 502 (1932).
3. *A. Bambini, P.R. Berman.* Phys. Rev. A, 23, 2496 (1981); Ю.Н. Демков, М. Кулике. Вестник Ленингр. ун-та., Физ., Хим., 16, 39 (1969).

4. *C.E. Carroll and F. T. Hioe.* Phys. Rev. A 42, 1522 (1990); C.E. Carroll and F.T. Hioe. J. Opt. Soc. Am. B 5, 1335 (1988); C.E. Carroll and F.T. Hioe, Phys. Rev. A 36, 724 (1987); C.E. Carroll and F.T. Hioe, J. Math. Phys. 29(2), 487 (1988).

5. *A.M. Ishkhanyan.* Phys. Rev. A 61, 063609 (2000); A.M. Ishkhanyan. Phys. Rev. A 61, 063611 (2000).

6. *A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen.* Phys. Rev. A 65, 051403 (R) (2002).

7. *A.M. Ishkhanyan.* J. Phys. A, 30, 450 (1997); A.M. Ishkhanyan. Optics Communications, 176, 155 (2000).

8. *A.M. Ishkhanyan.* J. Physics A: Math. Gen., 33, 5539 (2000); A.M. Ishkhanyan and K.-A. Suominen. J. Phys. A: Math. Gen. 34, 6301 (2001).

9. *A.M. Ishkhanyan.* J. Physics A: Math. Gen., 33, 5041 (2000).

10. *B.W. Shore.* The Theory of Coherent Atomic Excitation, New York, Wiley, 1990; L. Allen, J. H. Eberly. Optical Resonance and Two-Level Atoms. New York, Wiley, 1975.

11. *A. Erdŭlyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi.* Higher Transcendental Functions, New York, McGraw-Hill, 1953; L.J. Slater. Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966; *Ф. Олвер.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., Наука, 1978; *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1976.

12. *T.A. Laineand S. Stenholm.* Phys. Rev. A 53, 2501 (1996).