

ФИЗИКА

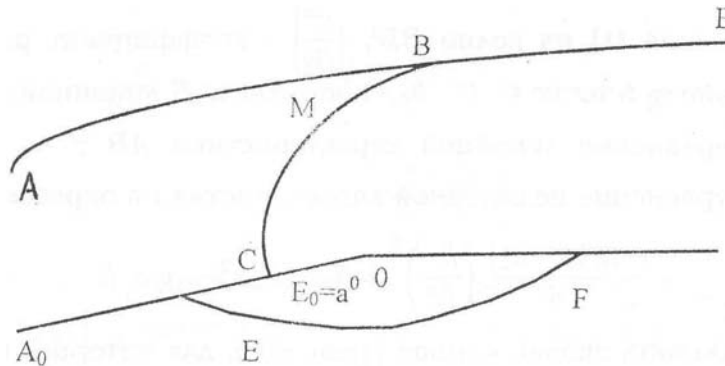
УДК 53.517

Чл.-кор. НАН РА А. Г. Багдоев, Г. А. Мартиросян

Нелинейная дифракция электромагнитной волны в неоднородной ферритовой среде

(Представлено 19/X 2001)

Рассматривается задача о прохождении электромагнитной волны AB (рисунок) около полубесконечного непрозрачного экрана в феррите. В начальный момент времени $t = 0$ волна занимает положение OA_0 . Ставится задача определить линейные и нелинейные решения в окрестности точки B касания волны AB с точечной волной BB' , произведенной краем экрана.



Пусть x, y есть плоскость, в которой распространяется волна, и имеется лишь компонента магнитного поля $H_z(x, y) = H$. В случае феррита для малых H_z можно взять для магнитной восприимчивости квадратичную и кубичную нелинейность

$$\mu' = \mu_0(x, y) - \frac{\delta_2 c^2}{c_0^2} H - \frac{2\delta_3 c^2}{3c_0^2} H^2, \quad \frac{1}{c_0^2} = \frac{\mu_0}{c^2}, \quad (1)$$

c - скорость света. Уравнение Максвелла

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c_0^2} H - \frac{\delta_2}{c_0^2} H^2 - \frac{2\delta_3}{3c_0^2} H^3 \right). \quad (2)$$

Нормальная скорость нелинейной волны будет

$$c_n = c_0 + c_0 \delta_2 H + c_0 \delta_3 H^2. \quad (3)$$

В линейной задаче $\delta_2 = 0, \delta_3 = 0, H = H_0$ решение уравнения (2) при заданном начальном условии

$$H_0 = a^0 \quad (4)$$

на волне OA_0 можно найти методом Адамара с использованием теории Кирхгоффа об интеграции по освещенной части начальной волны, и вблизи точки B (рисунок) имеет место [1]

$$H_0 = \frac{A(t)}{\pi\sqrt{k_1 - k_2}} \arctg \frac{\sqrt{-2c_1\tau(k_1 - k_2)}}{\theta - \theta_0}, \quad \tau < 0, \quad (5)$$

$$H_0 = \frac{A(t)}{\sqrt{k_1 - k_2}}, \quad \tau > 0.$$

Здесь τ, θ - лучевые координаты, $\tau = \text{const}$ дает фронты точечных волн, $\theta = \text{const}$ соответствующие лучи, k_1 есть кривизина обращенной точечной волны EF с центром в точке $M(x, y)$, вычисленная в начальном положении волны, k_2 есть кривизина OA_0 в точке O ,

$$A(t) = \frac{a^0 \sqrt{c_0}}{\sqrt{c_1} \sqrt{|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}|}} \quad (6)$$

есть лучевое решение [1] на волне BB' , $|\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}|$ - коэффициент расхождения волны, c_1 - значение c_0 в точке O , $\theta = \theta_0$ - координата B линейной задачи.

Используя уравнение линейной характеристики AB $\tau = \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2c_1(k_1 - k_2)}$, можно записать уравнение нелинейной характеристики в окрестности B [1]

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{c_1}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 = \delta_2 u + \delta_3 u^2, \quad u = H, \quad (7)$$

и по нему восстановить эволюционное уравнение, для которого (7) является уравнением характеристик

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c_1}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \delta_2 u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta_3 u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - u \frac{d \ln A}{dt} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (8)$$

где второе соотношение дает смысл функции v .

Вводя переменные $u = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \mu$, $v = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \nu$, можно (8) записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} &= \frac{\partial \nu}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{1}{2(k_1 - k_2)} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \mu - \frac{c_1}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \frac{\partial \nu}{\partial \theta} + \\ &+ \delta_2 \frac{A\mu}{\sqrt{k_1 - k_2}} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \delta_3 \frac{A^2 \mu^2}{k_1 - k_2} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Можно с помощью первых уравнений (5), (9) найти в линейной задаче

$$\nu = \frac{\theta - \theta_0}{\pi(k_1 - k_2)c_1} \text{tg } \pi - \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2} \frac{\mu}{c_1} \quad (10)$$

и считать, что это соотношение в плоскости годографа имеет место и в нелинейной задаче.

Тогда, интегрируя систему (9), можно получить

$$\tau = -\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_1} \text{tg}^2 \pi + \int_0^t \delta_2 \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \mu dt + \int_0^t \delta_3 \frac{A^2}{k_1 - k_2} \mu^2 dt, \quad (11)$$

причем под знаком интегралов $\frac{\sin \mu \pi}{\sqrt{k_1 - k_2}} = \text{const}$.

Соотношения (10), (11) дают точное решение уравнений (9), удовлетворяющее условию сшивания с линейным решением (5) и с нелинейным одномерным решением [1] вблизи волны

BB' и вдали от B . Кроме того удовлетворены условия на ударной волне BB' в точке B . Следует отметить, что ABB' будет ударной в случае $\delta_2 a^0 > 0$, $\delta_3 > 0$.

В случае $\delta_2 a^0 < 0$, $\delta_3 < 0$ волна ABB' будет непрерывной волной (на которой $u = 0$), при этом имеется висячая ударная волна BC , позади которой можно снова взять решение (10), (11), а впереди нее решение имеет место в виде семейства характеристик, на каждой из которых $\mu = \text{const}$, причем имеет место решение [2,3]

$$\tau - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_1} = \mu^2 \int_0^t \delta_3 \frac{A^2}{k_1 - k_2} dt + \mu \int_0^t \delta_2 \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} dt, \quad (12)$$

$$\nu = -\frac{(\theta - \theta_0)\mu}{(k_1 - k_2)c_1}.$$

В случае однородной среды $c_0 = c_1$ и плоской волны AB $k_2 = 0$, $k_1 = \frac{1}{c_1 t}$ решения (10), (11) упрощаются и после замен величин (в случае $\delta_2 \gamma > 0$, $\delta_3 > 0$)

$$\frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} = \gamma, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{\delta_2 \gamma} Y, \quad u = \gamma \mu, \quad \tau = \delta_2 \gamma t \delta, \quad \nu = \sqrt{\delta_2 \gamma} t \nu' \quad (13)$$

дают решение

$$\delta = -\frac{Y^2}{2} t g^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \left(\mu^2 + \frac{1}{\pi} \mu \sin 2\mu \pi - \frac{2}{\pi^2} \sin^2 \mu \pi \ln \sin (\mu \pi) \right),$$

$$\nu' = \frac{Y}{\pi} t g \mu \pi - \mu Y. \quad (14)$$

В случае $\delta_2 a^0 < 0$, $\delta_3 < 0$ следует в (13) в $\frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$ заменить γ на $-\gamma$, и (14) снова имеет место, только нужно поменять знак при δ_3 на обратный. При этом позади висячей ударной волны BC берется (14), впереди нее согласно (12) получится

$$\delta = \frac{Y^2}{2} + \mu - \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu^2, \quad (15)$$

$$\nu' = -\mu Y. \quad (16)$$

В переменных (13) уравнения (9) запишутся в виде

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta} \left(\mu + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu^2 - \delta \right) + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu'}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial Y} = \frac{\partial \nu'}{\partial \delta}. \quad (17)$$

По обычной процедуре отсюда получится на ударных волнах $\delta = \delta(Y)$

$$\frac{d\delta}{dY} = \mp \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1) - \frac{2}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} (\mu^2 + \mu \mu_1 + \mu_1^2)}, \quad (18)$$

где μ_1 значение μ впереди ударной волны ($\delta_2 \gamma > 0$, $\delta_3 > 0$), на ударной волне BB' в (18) $\mu_1 = 0$ берется верхний знак.

Уравнение AB будет $\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} + \frac{Y^2}{2}$ и в точке B

$$\delta_B = 1 + \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2}, \quad \mu = 1, \quad Y_B = -\sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2}}. \quad (19)$$

Для $\delta_2 < 0$, $\delta_3 > 0$ на AB $\delta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} + \frac{\gamma^2}{2}$, $Y_B = -\sqrt{-1 \frac{4}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2}}$, $\mu_B = -1$. Для $\delta_3 = 0$ получается $\delta = \frac{1}{2} + \frac{\gamma^2}{2}$, $Y_B = -1$, для кубической среды

$$\left(\delta_2 \rightarrow 0, \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \rightarrow 1 \right) \quad \delta = \frac{1}{3} + \frac{\gamma^2}{2}, \quad Y_B = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Такой же подход можно применить к ударной волне BC , для которой в (18) нужно взять нижний знак, μ даются (14), μ_1 - (15), (16) и начальное условие имеет вид $Y_B = 0$, $\mu_B = 0$. При этом $\delta_2 < 0$, $\delta_3 > 0$ и в (18) следует заменить δ_3 на $-\delta_3$.

Для выяснения в общем случае наличия ударной волны ABB' можно изучить одномерное по δ решение вблизи BB' .

В случае $\gamma \delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ на ударной волне BB' получится

$$\frac{3}{2} = 2 \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu \ln \mu + \frac{1}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu + \frac{\pi^2 \gamma^2}{2} \mu.$$

В случае $\gamma > 0$, $\delta_2 < 0$, $\delta_3 > 0$, имеющем место для феррита, на BB'

$$\frac{3}{2} = -2 \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu \ln |\mu| - \frac{1}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \mu + \frac{\pi^2 \gamma^2}{2} \mu. \quad (20)$$

В случае $\delta_3 > 0$, поскольку $\mu < 0$, уравнение (20) не имеет решения и в исходном уравнении на ударной волне следует полагать $\mu = 0$, т. е. волна BB' непрерывная.

В случае $\delta_3 > 0$, $\delta_2 < 0$ следует графически определить, когда (20) имеет положительное решение ($-\mu$), т. е. BB' -ударная волна.

Этим условием будет $-\frac{5}{3} \frac{\delta_3 \gamma}{\delta_2} \geq \frac{3}{2} e + \frac{\pi^2 \gamma^2}{2}$.

Институт механики НАН РА

Горисский филиал ГИУА

ՀՀ ԳԱԱ թղթ.անդամ Ա.Գ.Բազդոն, Հ.Ա.Մարտիրոսյան

Էլեկտրամագնիսական ալիքի ոչ գծային դիֆրակցիան անհամասեռ ֆերիտի միջավայրում

Դիտարկվում են գծային և ոչ գծային խնդիրներ էլեկտրամագնիսական ալիքի դիֆրակցիայի համար անհամասեռ միջավայրում կիսաանվերջ էկրանի մոտ: Արտածված են փակ անալիտիկ լուծումներ: Ստացված են լուծումներ հարվածային ալիքի վրա:

Литература

1. Багдоев А. Г. Распространение волн в сплошных средах. Изд. АН Арм, ССР, Ереван, 1981. 307 с.
2. Багдоев А. Г., Саакян С. Г. - Информационные технологии и управление. 2001. N 2. С. 10-16.
3. Багдоев А. Г., Саакян С. Г. - Информационные технологии и управление. 1999. N 4. С. 29-34.