ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 102 2002 № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

М.В. Белубекян, К.Б.Казарян

Поверхностные волны типа Лява в случае неоднородного слоя

(Представлено академиком С.А. Амбарцумяном 15/V 2002)

Для неоднородного упругого слоя, лежащего на упругом однородном полупространстве, определены условия существования поверхностных волн типа-SH. Показано, что поверхностные волны существуют, если наименьшая фазовая скорость упругих волн для соответствующего слоя со свободными поверхностями меньше скорости поперечной волны полупространства.
Впервые сдвиговые поверхностные волны типа SH были изучены в работе Лява [1] для упругого однородного слоя, находящегося в условиях контакта с упругим однородным полупространством. Для неоднородного полупространства вопросы существования поверхностных волны типа SH обсуждены в работе [2]. Обзор работ по поверхностным волнам типа SH для различных сред имеется в работах [3,4].

1. Рассмотрим упругий неоднородный слой, расположенный на упругом однородном полупространстве, верхняя поверхность слоя свободна от механических напряжений. Механические характеристики материала слоя - модуль сдвига $\mu(x_2) > 0$ и плотность $\rho(x_2) > 0$ являются функциями от координаты толщины слоя $x_2 \in (0, h)$. Полупространство, занимающее область $x_2 \in (h, \infty)$, характеризуется модулем сдвига μ_0 , плотностью ρ_0 .

Относительно сдвиговых компонент упругих перемещений слоя $U_3(x_1, x_2, t)$ и полупространства $V_3(x_1, x_2, t)$ имеем следующие уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu(x_2)\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right]+\mu(x_2)\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}=\rho(x_2)\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \qquad x_1\in(-\infty,\infty),\ x_2\in(0,h). \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2}=\frac{\rho_0}{\mu_0}\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} \qquad x_1\in(-\infty,\infty),\ x_2\in(h,\infty). \tag{2}$$

На поверхности контакта имеем условия непрерывности упругих перемещений и касательных напряжений

$U_3(x_1, x_2, t) = V_3(x_1, x_2, t)$ при $x_2 = h$

$$\mu(x_2) = \frac{\partial U_3(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = \mu_0 \frac{\partial V_3(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \qquad \text{при} \qquad x_2 = h \tag{3}$$

На свободной поверхности слоя имеем

$$\frac{\partial U_3(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{при} \qquad x_2 = 0 \tag{4}$$

На основе этих уравнений исследуется вопрос существования поверхностной SH-волны, когда амплитуда волны убывает от поверхности контакта.

$$V_3(x_1, x_2, t) \to 0 \qquad \text{при} \qquad x_2 \to \infty \tag{5}$$

Представим решения в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси x_1

$$U_3(x_1, x_2, t) = U(x)\exp[i(kx_1 - \omega t)] \tag{6}$$

$$V_3(x_1, x_2, t) = V(x)\exp[i(kx_1 - \omega t)] \tag{7}$$

Здесь ω есть частота волны, k -величина, обратная длине волны, $x = kx_2$ - безразмерная координата, $U(x), V(x)$ амплитуды волн. Для функции $V(x)$ имеем

$$\frac{d^2V}{dx^2} - (1 - \lambda)V = 0 \tag{8}$$

где $\lambda = \frac{\omega^2}{k^2 c_0^2}$; $c_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$. При $\lambda < 1$ уравнение (8) имеет следующее затухающее на бесконечности решение

$$V(x) = C\exp\left(-x\sqrt{1-\lambda}\right) \tag{9}$$

Подставляя это решение в условия контакта, получим следующее граничное условие для функции $U(x)$ при $x = kh$

$$\frac{dU}{dx} + \tilde{\mu}\sqrt{1-\lambda}U \qquad \text{при} \qquad x = kh \tag{10}$$

где $\tilde{\mu} = {}^{\mu_0}/_{\mu(kh)}$. Для функции $U(x)$ имеем

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\frac{dU}{dx}\right] + [\lambda\rho(x)c_0^2 - \mu(x)]U = 0 \tag{11}$$

На свободной поверхности имеем

$$\frac{dU}{dx} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0 \tag{12}$$

Краевая задача (10-12) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля [5] от параметра λ, граничные условия которой также зависят от этого параметра. Для этой задачи существование собственных значений для $\lambda \in (0,1)$ свидетельствует о наличии поверхностных волн в рассматриваемой системе неоднородный слой- однородное полупространство.

Так как собственные значения входят в граничные условия и $\lambda < 1$, то существование решения краевой задачи возможно лишь при выполнении определенных условий, налагаемых на функции неоднородности, толщину слоя и длину волны. Для выяснения вопроса существования собственных значений $\lambda < 1$ (существования соответствующих поверхностных волн) исследуем следующую вспомогательную задачу Коши

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\frac{dU(x)}{dx}\right] + [p\rho(x)c_0^2 - \mu(x)]U(x) = 0 \tag{13}$$

$$U(x) = 1, \quad \frac{dU(x)}{dx} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0 \tag{14}$$

Для значений параметра $p < p_*$, где $p_* = \frac{\min \mu(x)}{c_0^2 \max \rho(x)}$ умножая уравнение (13) на $U(x,p)$ получим

$$[\mu(x)U'(x)U(x)]' = \mu(x)U'^2(x) + [\mu(x) - p\rho(x)c_0^2]U^2(x) > 0 \tag{15}$$

где $(\,)' = \frac{d}{dx}$. Так как разность $\mu(x) - p\rho(x)c_0^2 > 0$ при $p < p_*$ для всех $x > 0$ и $\mu(0)U'(0)U(0) = 0$ из (15) имеем, что в этом случае $U(x,p)U'(x,p) > 0$ для всех $x \in (0, kh]$. Из теоремы сравнения Штурма [5] следует, что при $p > p^{**}$, где

$$p^{**} = \frac{\max \mu(x)}{c_0^2 \min \rho(x)} \tag{16}$$

решение задачи Коши $U(x,p)$ имеет хотя бы один ноль в интервале $(0, kh)$. Так как нули решения задачи Коши непрерывно зависят от параметра p и входят в интервал $[0, kh]$ через точку $x = kh$, передвигаясь влево с увеличением p, то, следовательно, существует такое значение параметра p^*, при котором решение $U(x, p^*)$ не имеет нулей в открытом интервале $(0, kh)$ и $U(kh, p^*) = 0$. Рассмотрим два решения $U_1(x, p_1), U_2\,(x, p_2)$ при различных значениях $p_1 < p_2 < p^*$. Используем тождество

$$\left[\mu(x)U_1^2(x,p_1)\left(\frac{U_1'(x,p_1)}{U_1(x,p_1)} - \frac{U_2'(x,p_2)}{U_2(x,p_2)}\right)\right]' \equiv$$

$$\equiv (p_2 - p_1)\rho(x)c_0^2U_1^2(x,p_1) + \mu(x)U_1^2(x,p_1)\left(\frac{U_1'(x,p_1)}{U_1(x,p_1)} - \frac{U_2'(x,p_2)}{U_2(x,p_2)}\right)^2$$

Так как функции $U_1(x, p_1), U_2\,(x, p_2)$ не имеют нулей в интервале $(0, kh)$, то, интегрируя это тождество от нуля до kh с учетом начальных условий, получим

$$\frac{U_1'(kh,p_1)}{U_1(kh,p_1)} > \frac{U_2'(kh,p_2)}{U_2(kh,p_2)} \tag{17}$$

То есть имеем, что функция $\frac{U'(kh,p)}{U(kh,p)}$ является монотонно убывающей функцией от параметра p, когда $p < p_*$.

Так как функции $U(x,p), U'(x,p)$ являются непрерывными функциями от параметра p, то имеем, что в области изменения параметра $p \in [0, p^*)$ функция $\frac{U'(kh,p)}{U(kh,p)}$ убывает от положительного значения при $p = 0$ до значения $-\infty$ при $p = p^*$. С другой стороны, функция

$-\tilde{\mu}\sqrt{1-p}$, присутствующая в граничном условии (10) краевой задачи, возрастает от отрицательного значения при $p=0$ до нуля при $p=1$. Обозначим через $p_0(p_* < p_0 < p^*)$ то значение параметра p, при котором функция $U'(kh, p)$ впервые обращается в ноль. Тогда , если $p_0 < 1$, то существует такое значение параметра $\lambda_* < 1$, при котором выполняется граничное условие (10) и, следовательно, краевая (10-12) задача имеет решение. В противном случае, а именно, при $p_0 \geq 1$, эта задача не имеет решения.

Таким образом установлено, что в системе неоднородный слой - упругое однородное полупространство поверхностная волна существует, если наименьшая фазовая скорость упругих волн для соответствующего слоя со свободными поверхностями меньше скорости поперечной волны полупространства. Следует отметить, что это условие не обусловливается наличием разрыва или непрерывности механических характеристик на поверхности контакта. С практической точки зрения более удобно использовать следующее условие. Так как

$$p_0 = \min_{Z(x)} \frac{\left\langle \mu(x), \left[Z'^2(x) + Z^2(x)\right]\right\rangle}{c_0^2 \left\langle \rho(x) Z^2(x)\right\rangle} < \frac{\left\langle \mu(x)\right\rangle}{c_0^2 \left\langle \rho(x)\right\rangle} \qquad (18)$$

где $Z(x)$ есть всевозможные функции, удовлетворяющие условиям $\frac{dZ}{dx}=0$ при $x=0,\ x=kh$, $\left\langle f,g\right\rangle \equiv \int_0^{kh} fg dx$, $\left\langle f\right\rangle \equiv \int_0^{kh} f dx$, то в качестве условия существования поверхностной волны примем условие

$$\left(\int_0^{kh} \mu(x)dx\right)\left(\int_0^{kh} \rho(x)dx\right)^{-1} < c_0^2 \qquad (19)$$

Отметим, что это условие в случае однородного слоя совпадает с условием Лява. Если в качестве неоднородного слоя рассматривать композиционный пакет однородных слоев, то на основе (19) имеем

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \mu_j h_j\right)\left(\sum_{j=1}^{N} \rho_j h_j\right)^{-1} < c_0^2 \qquad (20)$$

Отметим, что это условие совпадает с условием, полученным в работе [6], где была исследована задача Лява для тонкого пакета однородных слоев, в предположении, когда толщина пакета намного меньше длины волны. К условию (19) можно также придти в приближении тонкого слоя, когда слой настолько тонкий, что можно не учитывать изменение упругого перемещения слоя по толщине. Действительно, интегрируя уравнение (11) по толщине слоя с учетом условия (12), получим

$$\mu(x)\frac{dU(x)}{dx}\bigg|_{x=kh} + \int_0^{kh}\left[\lambda\rho(x)c_0^2 - \mu(x)\right]U(x)dx = 0$$

Принимая в интегральном выражении, в силу тонкости слоя, $U(x) = const$ с учетом условий контакта

$$\mu(x)\frac{dU(x)}{dx}\bigg|_{x=kh} = \mu_0 \frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=kh}; \qquad U(kh) = V(kh)$$

получим граничное условие для функции перемещения упругого полупространства $V(x)$

$$-\mu_0 \frac{dV(x)}{dx}\bigg|_{x=kh} + \left[\lambda c_0^2 \langle\rho(x)\rangle - \langle\mu(x)\rangle\right] V(kh) = 0$$

Используя решение (9), получим уравнение, определяющее λ

$$\mu_0\sqrt{1-\lambda} = \lambda c_0^2 \langle\rho(x)\rangle - \langle\mu(x)\rangle \qquad (21)$$

Уравнение (21) имеет решение только в случае выполнения условия (19).

Решение уравнения (21) имеет вид

$$\lambda = 1 - \left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta+\xi^2}+\xi}\right)^2$$

где

$$\eta \equiv 1 - \frac{\langle\mu(x)\rangle}{c_0^2\langle\rho(x)\rangle} > 0, \qquad \xi = \frac{\mu_0}{2c_0^2\langle\rho(x)\rangle}$$

2. Теперь на основе точного решения краевой задачи рассмотрим наиболее простой, но характерный конкретный пример неоднородности, когда модуль сдвига и плотность слоя на поверхности контакта равны, соответственно, модулю сдвига и плотности упругого полупространства. Пусть $\mu(x_2) = \mu_0$, $\rho(x_2) = \rho_0 \exp[q_0(h - x_2)]$. При $k = {q_0}/{4}$, а именно, для волн, длина которых имеет указанную связь с коэффициентом неоднородности q_0, уравнение (11) имеет решение в элементарных функциях. В этом случае имеем следующую краевую задачу

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \left[\lambda \exp\left(4(kh - x)\right) - 1\right]U = 0 \qquad (22)$$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0 \qquad (23)$$

$$\frac{dU}{dx} + \sqrt{1-\lambda}U = 0 \qquad \text{при} \qquad x = kh \qquad (24)$$

Для рассматриваемого типа неоднородности условие (19) выполняется для всех значений kh. Этот вывод также следует и из точного решения краевой задачи.

Уравнение (22) имеет следующее решение

$$U(x) = e^x\left\{A\sin\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\exp 2(kh - x)\right] + B\cos\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\exp 2(kh - x)\right]\right\} \qquad (25)$$

(A, B есть постоянные).

После удовлетворения граничным условиям для определения собственных чисел λ получим уравнение

$$F(\lambda) = 0 \tag{26}$$

$$F(\lambda) \equiv \lambda^{-1/2} tg \left\{ \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left[\exp(2kh) - 1 \right] \right\} + \frac{1 - \left(1 + \sqrt{1-\lambda}\right) \exp(2kh)}{1 + \sqrt{1-\lambda} + \lambda \exp(2kh)}$$

Покажем, что это уравнение имеет решение для всех значений параметра kh. На левом конце интервала $\lambda \in [0,1]$ имеем $F(0) = -\exp(2kh) < 0$. С другой стороны при $\beta = \frac{\exp(2kh)-1}{2} < \frac{\pi}{2}$ на правом конце интервала $\lambda \in [0,1]$ имеем $F(1) = \operatorname{tg}\beta - \frac{\beta}{\beta+1} > 0$. В случае, когда $\beta \geq \frac{\pi}{2}$, используя обозначение $\beta \geq \frac{\pi}{2} + \alpha$, где $\alpha \geq 0$ имеем $\lambda \to \lambda^* = \frac{\pi^2}{(\pi+\alpha)^2}$; $F \to +\infty$. Так как в обоих рассмотренных случаях функция $F(\lambda)$ является знакопеременной, то для всех значений параметра kh имеем, что существует по крайней мере одно такое значение $\tilde{\lambda} < 1$, при котором $f(\tilde{\lambda}) = 0$.

Институт механики НАН РА

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Կ.Բ. Ղազարյան

Լյավի տիպի մակերևութային ալիքները անհամասեռ շերտի դեպքում

Համասեռ առաձգական կիսատարածության եզրին դրված անհամասեռ առաձգական շերտի համար որոշված են սահքի մակերևութային ալիքների գոյության պայմանները: Ցույց է տրված, որ մակերևութային ալիքները գոյություն ունեն, եթե ազատ մակերևույթով համապատասխան շերտի առաձգական ալիքների ամենափոքր փուլային արագությունը փոքր է կիսատարածության ալիքի արագությունից:

Литература

1. *Love A.E.H.* Some problems of geodynamics. Cambridge.Univ.Press, 1911. 180p.
2. *Белубекян М.В. Казарян К.Б.* - Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т.53.N1. С.6-12.
3. *Белубекян М.В.* - В сб.: Проблемы механики деформируемого тела. Ереван. 1997. С.79-96.
4. *Maugin G.A.* - Advances in Applied Mechanics. 1983. V.23. P.373-474.
5. *Sturm C.* - Journ.de Math, pur.et appl.1.1836. P. 106-186.
6. *Белубекян М.В.* - В сб.: Актуальные проблемы неоднородной механики. Ереван. 1991. С.66-71.