ՀԱՅԱUՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 102 2002 № 4

ИНФОРМАТИКА

УДК 510

В.К.Леонтьев, Г.Л.Мовсисян

Об одной проблеме дозировки

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 16/IX 2002)

Многие производственные процессы заканчиваются выдачей продукции в заранее определённых дозах: 25 кг - мешок цемента, 2 кг - корм для собак, литр растительного масла, 400 г - пакет цветной капусты и т.д. Для дозировки используются объёмные и весовые дозаторы или их различные комбинации. Область применения этих дозаторов зависит от внешних характеристик дозируемого продукта. Например, для жидких или однородных продуктов предпочтительней объёмные дозаторы. В большинстве же случаев в связи с явной "неоднородностью" продукта предпочтительней использовать весовые дозаторы. В любом случае, при дозировке продукта по определённому весу или объёму необсуждаемым является принцип гарантированного результата - продукт, попадающий к потребителю, должен иметь вес или объём не менее, чем заявленный. Поскольку характеристики продукта не всегда позволяют достичь абсолютной точности дозировки, то производитель может нести существенные потери в связи с превышением заявленного минимума. Например, при упаковке цветной капусты в пакеты по 400 г превышение дозы на 5 г ($\approx$1.5%) приводят к убыткам в сотни тысяч долларов в год. Кроме того, возможны потери в связи с ухудшением качества смеси, с уменьшением надежности (высокие технологии), а также с уменьшением уровня безопасности (медицинские препараты).

Мы рассмотрим одну из естественных проблем, возникающих при использовании весового дозатора в рамках описанной ниже модели.

Имеется партия яблок S, которую требуется упаковать в пакеты, вес каждого из которых должен быть не менее, чем предназначенное число m. При фиксированной цене пакета "качество" торговли определяется средним весом пакета и в некоторых случаях может быть неудовлетворительным, так как средний вес пакета существенно превышает m. Приведенные ниже примеры, возможно, несколько прояснят общую ситуацию.

1. Пусть в партии S все яблоки имеют одинаковый вес, равный 5, и предписанный минимальный вес пакета равен 11. Ясно, что при соблюдении условия формирования пакета каждый

из них будет иметь вес, равный 15, что на 40% превышает предписанный вес и, тем самым, торговля абсолютно убыточна.

2. Если в партии S все яблоки имеют равновероятные веса 2 и 6, а предписанный минимальный вес m = 10, то возможные веса пакетов могут быть найдены согласно нижеследующей схеме:

$$\begin{array}{lll} 1)\ 2+2+2+2+2=10 & 4)\ 2+2+6=10 & 7)\ 6+2+2=10 \\ 2)\ 2+2+2+2+6=14 & 5)\ 2+6+6=14 & 8)\ 6+2+6=14 \\ 3)\ 2+2+2+6=12 & 6)\ 2+6+2=10 & 9)\ 6+6=12 \end{array} \tag{1}$$

Таким образом, возможные веса пакетов: 10, 12, 14. Как показывает таблица (1), каждый пакет содержит 2, 3, 4 или 5 яблок. Найдем распределение вероятности весов пакетов.

I. Пакеты веса 10 могут быть реализованы 1), 4), 6), 7) способами. Если $p_k(10)$ – вероятность того, что пакет из к яблок имеет вес, равный 10, то:

$$p_3(10) = \frac{3}{8},\ p_5(10) = \frac{1}{32} \text{ и } p_k(10) = 0 \text{ при } k \neq 3{,}5$$

Отсюда получаем:

$$p(10) = p_3(10) + p_5(10) = \frac{13}{32}$$

II. Для пакетов веса 12 имеем

$$p_2(12) = \frac{1}{4},\ p_4(12) = \frac{1}{16}$$

и

$$p(12) = \frac{5}{16}$$

III. Для пакетов веса 14

$$p_5(14) = \frac{1}{32},\ p_3(14) = \frac{1}{4}$$

и

$$p(14) = \frac{9}{32}$$

Таким образом, искомое распределение выглядит так:

v	10	12	14
p	$\frac{13}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{9}{32}$

Для среднего веса пакета $\overline{m}$ имеем: $\overline{m} = 11{,}75$, что на 17% превышает предписанный минимальный вес.

В общем случае хотелось бы понять, как влияют "структурные" характеристики партии S на средний вес пакета при заданном минимальном весе m, и учесть возможные потери.

Отметим также, что в рассмотренной модели вероятности p_i предполагаются стационарными, что, по-видимому, оправдано при больших объёмах партии S и должно учитываться при незначительных и малых объёмах.

Ниже мы используем в ряде эпизодов оператор $\mathrm{Coef}_n\{f(n)\}$ в смысле монографии [1]. Отметим лишь, что в случае аналитичности функции в окрестности нуля $\mathrm{Coef}_n\{f(n)\}$ и вычет в нуле функции f(n) совпадают.

Рассмотренная нами модель напоминает ряд задач теории вероятностей, касающихся сложных распределений и ветвящихся процессов [2], но, повидимому, содержит и определенные новые моменты.

В общем случае рассматриваемая задача выглядит следующим образом. Имеется партия яблок S и на множестве весов $M = \{a_1 < a_2 \ldots < a_N\}$ этих яблок задано распределение вероятностей

$$p(a_i) = P_i, \;\; i = 1, 2 \ldots N$$

При этом числа a_i предполагаются натуральными.

Процедура взвешивания. Яблоки из партии S независимо поступают на чашу весов и как только суммарный вес достигнет или превысит предписанное значение m, из этой совокупности формируется пакет, и все повторяется снова.

Проблема. Требуется найти распределение весов пакетов и его стандартные характеристики.

Через $\mathrm{p_k}(v)$ мы обозначим вероятность того, что совокупность из k яблок партии S имеет вес, равный v (эта совокупность может не образовывать пакет). Рассмотрим две производящие функции

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} p_i z^{a_i}$$

$$\Phi_k(z) = \sum_{v=1}^{\infty} p_k(v) z^v$$

Лемма 1.

$$\Phi_k(z) = f^k(z). \tag{2}$$

Если $p_k^0(v)$ - вероятность того, что пакет из k яблок имеет вес, равный $v \geq m$, то по формуле полной вероятности получаем:

$$p_k^0(v) = \sum_{i, v-a_i<m} p_{k-1}(v - a_i) p_i \qquad\qquad k = 2, 3 \ldots \qquad (5) \tag{3}$$

и

$$p_k^0(v) = \begin{cases} a_i, \;\; \textit{если} \;\; v \in M, \;\; \textit{и} \;\; v \geq m \\ 0, \;\; \textit{если} \;\; v \overline{\in} M \;\; \textit{или} \;\; v < m \end{cases}$$

Пусть $F_m(z)$ - производящая функция распределения $P^0(v)$ - вероятности пакета иметь вес, равный $v \geq m$.

Теорема 1.

$$F_m(z) = \frac{z^m}{2\Pi i} \oint_{|u|<\rho} \frac{f(u) - f(z)}{u^m(1 - f(u))(u - z)} du \tag{4}$$

Интегрирование в (4) ведётся по окружности достаточно малого радиуса с центром в нуле.

Доказательство. В силу (2) и (3)

$$p_k^0(v) = \sum_{i,v<m+a_i} p_i \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{\mathrm{f^{k-1}(n)}}{\mathrm{u^{v-a_i+1}}}\right\} = \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{\mathrm{f^{k-1}(n)}}{\mathrm{u^{v+1}}} \sum_{\mathrm{i,v<m+a_i}} \mathrm{p_i u^{a_i}}\right\} \tag{5}$$

По формуле полной вероятности из (5) получаем

$$p^0(v) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^0(v) = \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^{v+1}(1-f)}} \sum_{\mathrm{i,v<m+a_i}} \mathrm{p_i u^{a_i}}\right\} \tag{6}$$

Отсюда:

$$F_m(z) = \sum_{v=m}^{\infty} z^v \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^{v+1}(1-f)}} \sum_{\mathrm{i,v<m+a_i}} \mathrm{p_i u^{a_i}}\right\} =$$

$$= \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u(1-f)}} \sum_{\mathrm{v=m}}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{u}}\right) \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{v-N}} \mathrm{p_i u^{a_i} \xi_v^{m+a_i}}\right\}$$

где

$$\xi_A^B = \begin{cases} 1, \text{ если } B > A \\ 0, \text{ если } B \leq A \end{cases}$$

Далее

$$F_m(z) = \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u(1-f)}} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{p_i u^{a_i}} \sum_{\mathrm{v=m}}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{u}}\right)^{\mathrm{v}} \mathrm{\xi_v^{m+a_i}}\right\} =$$

$$= \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u(1-f)}} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{p_i u^{a_i}} \sum_{\mathrm{v=m}}^{\mathrm{m+a_i-1}} \left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{u}}\right)^{\mathrm{v}}\right\} = \mathrm{z^m Coef_n}\left\{\frac{\mathrm{f(u) - f(z)}}{\mathrm{u^m(1-f)(u-z)}}\right\}$$

Что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 можно получить много информации относительно распределения $P^0(v)$. Для вычисления математического ожидания $\bar{a}_m$ или среднего веса пакета нам потребуется следующее утверждение технического характера.

Лемма 2. *Если* $\Phi(u) = \frac{\varphi(u)}{\lambda(u)}$, *где* $\varphi(u)$ *и* $\lambda(u) -$ *регулярные в окрестности точки u = 1 функции и* $\lambda(1) = \lambda'(1) = 0$, *а* $\lambda'' \neq 0$, *то*

$$res\Phi(u) = \frac{2[3\varphi'(1)\lambda^{(2)}(1) - \varphi(1)\lambda^{(3)}(1)]}{3[\lambda^{(2)}(1)]^2}$$

Итак, пусть

$$\bar{a}_m \text{ - средним вес пакета } u$$

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{N} p_i\, a_i \quad \text{ - средний вес яблока}$$

$$\mu\xi^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i\, a_i^2 \quad \text{ - средний вес яблока в квадрате.}$$

Теорема 2.

$$\bar{a}_m = m + \frac{1}{2}\ \frac{\mu\xi^2 - \bar{a}}{\bar{a}} - \bar{a} \sum_{f(\alpha_i)=1, \alpha_i \neq 1} \frac{1}{\alpha_i^m(\alpha_i - 1) f'(\alpha_i)}$$

Доказательство. Так как $\bar{a}_m = F_m'(1)$, то из (4) получаем

$$F_m'(z) = mz^{m-1}\mathrm{Coef_n}\left\{\frac{\mathrm{f(u) - f(z)}}{\mathrm{u^m(1-f)(u-z)}}\right\} -$$

$$-z^m f'(z)\mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^m(1-f)(u-z)}}\right\} + \mathrm{z^m Coef_n}\left\{\frac{\mathrm{f(u)-f(z)}}{\mathrm{u^m(1-f)(u-z)^2}}\right\}$$

Отсюда

$$F_m'(1) = -m\mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^m(u-1)}}\right\} -$$

$$-f'(1)\mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^m(1-f)(u-1)}}\right\} - \mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^m(u-1)^2}}\right\}$$

Далее

$$f'(1) = \bar{a}$$

$$\mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^m(u-1)}}\right\} = -1$$

$$\mathrm{Coef_n}\left\{\frac{1}{\mathrm{u^m(u-1)^2}}\right\} = \mathrm{m}$$

Отсюда

$$F'(1) = -f'(1)\mathrm{Coef_n}\left\{\frac{\mathrm{u^{-m}}}{\mathrm{(1-m)(u-1)}}\right\}$$

Используя теперь лемму 2 при $\varphi(u) = u^{-m}$ и $\lambda(u) = (u-1)(1-f(u))$ (точка $u = 1$ является полюсом порядка два для функции $\lambda(u)$), получаем

$$res\left\{\frac{u^{-m}}{(1-f)(u-1)}\right\} = \frac{m}{f'(1)} + \frac{1}{2}\quad \frac{f''(1)}{[f'(1)]^2} \tag{7}$$

Далее по основной теореме о вычетах

$$\mathrm{Coef}_n\left\{\frac{u^{-m}}{(1-f)(u-1)}\right\} = -\mathrm{res}\left\{\frac{u^{-m}}{(1-f)(u-1)}\right\} -$$

$$-\sum_{u\neq 1, f(u)=1} res\left\{\frac{u^{-m}}{(1-f)(u-1)}\right\} \qquad (8)$$

Если $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_{\alpha_N}$ − все корни уравнения f(z) = 1, то

$$res\frac{u^{-m}}{(u-1)(1-f)} = \lim_{u\to\alpha_i}\frac{u^{-m}}{(u-1)\frac{f(u)-f(\alpha_i)}{u-\alpha_i}} = -\frac{\alpha_i^{-m}}{(\alpha_i-1)f'(\alpha_i)}$$

Отсюда

$$\sum_{u\neq 1, f(u)=1} res\left\{\frac{u^{-m}}{(1-f)(u-1)}\right\} = -\sum_{i=2}^{\alpha_N}\frac{\alpha_i^{-m}}{(\alpha_{i-1})f'(\alpha_i)} \qquad (9)$$

Из (7)-(9) следует

$$F'(1) = m + \frac{1}{2}\quad\frac{\mu\xi^2-\bar{a}}{\bar{a}} - \bar{a}\sum_{i=2}^{a_N}\frac{1}{\alpha_i^m(\alpha_{i-1})f'(\alpha_i)}$$

где α_1 − отличные от единицы корни уравнения f(z) = 1,
Замечание. Если z_0 − корень уравнения f(z) = 1, то

$$1 = \left|\sum_{i=1}^{N} p_i z_0^{a_i}\right| \leq \sum_{i=1}^{N} p_i |z_0|^{a_i} \leq \max_i |z_0|^{a_i}$$

Отсюда следует, что $|z_0| \geq 1$ и, таким образом, $|\alpha_i|^m \geq 1$.

1. Пусть M = {1,2 ...N} p(i) = $\frac{1}{N}$ i=l,2 ... N.

$$f(z) = \frac{1}{N}(z + z^2 + \ldots + z^N) = \frac{z^{N+1}-1}{N(z-1)}$$

$$f'(z) = \frac{(N+1)z^N - 1}{N(z-1)} - \frac{z+z^2+\ldots+z^N}{N(z-1)} = \frac{(N+1)z^N-1}{N(z-1)} - \frac{f(z)}{z-1}$$

Если 1, $\alpha_2, \dots \alpha_N$ − корни уравнения f(z) = 1, то

$$f'(\alpha_i) = \frac{(N+1)\alpha_i^N - 1}{N(\alpha_i - 1)} - \frac{1}{\alpha_i - 1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_i-1}\left(\frac{N+1}{N}\alpha_i^N - \frac{1}{N} - 1\right) = \frac{N+1}{(\alpha_i-1)N}(\alpha_i^N - 1)$$

Из уравнения $f(\alpha_i) = 1$ получаем

$$\alpha_i^{N+1} - \alpha_i(N+1) + N = 0 \qquad (10)$$

или

$$\alpha_i^N = \frac{\alpha_i(N+1)-N}{\alpha_i}, \quad \alpha_i^N - 1 = \frac{N(\alpha_i - 1)}{\alpha_i}$$

Отсюда

$$f'(\alpha_i) = \frac{N+1}{\alpha_i}, \qquad i = 2,3,\ldots$$

Поэтому

$$\sum \frac{1}{\alpha_i^m(\alpha_i - 1)f'(\alpha_i)} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=2} \frac{1}{\alpha_i^{m-1}(\alpha_i - 1)}$$

Окончательный результат выглядит так

$$\bar{a}_m = m + \frac{2\bar{a}-2}{3} - \frac{\bar{a}}{N+1}\sum_{i=2} \frac{1}{\alpha_i^{m-1}(\alpha_i - 1)}$$

где α_i определены выше.

Оценим теперь сумму

$$A_m = \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{\alpha_i^{m-1}(\alpha_i - 1)}$$

Пусть

$$\max_i \frac{1}{|\alpha_i - 1|} = \gamma$$

Тогда

$$\left|A_m\right| \leq \gamma \sum_{i=1}^{N+1} \left|\frac{1}{\alpha_i}\right|^{m-1}$$

Далее из уравнения (10) имеем: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{N+1} = N$

Так как $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, то $|\alpha_3|^{m-1}|\alpha_4|^{m-1}\ldots|\alpha_{N+1}|^{m-1} = N^{m-1}$

Отсюда

$$\left|\frac{1}{\alpha_3}\right|^{m-1} \cdots \left|\frac{1}{\alpha_{N+1}}\right|^{m-1} = \left(\frac{1}{N}\right)^{m-1}$$

Поэтому

$$\left|A_m\right| \leq \gamma\left[(N-1) + \left(\frac{1}{N}\right)^{m-1}\right]$$

что является следствием решения оптимизационной задачи

$$\sum_{i=3}^{N+1} z_i \to \max$$

$$z_3 z_4 \ldots z_{N+1} = c, \quad z_i > 0, \quad i = \overline{3, N+1}$$

Учитывая эту границу, из (11) получаем

$$a_m \leq m + \frac{2\bar{a}-2}{3} + \gamma\bar{a}\left(\frac{N-1}{N+1} + \left(\frac{1}{N}\right)^m\right)$$

2. Пусть M = {n} m=2n+l.

$$f(z) = z^n, \quad \bar{a} = n, \quad \mu\xi^2 = n^2, \quad f'(z) = nz^{n-1}$$

Отсюда

$$\bar{a}_m = m + \frac{1}{2}\frac{n^2-n}{n} - n\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\alpha_i^m(\alpha_i-1)f'(\alpha_i)}$$

Здесь $\{\alpha_i\}$ - это корни полинома $\varphi(z) = 1 + z \ldots + z^{n-1}$. Отсюда

$$\sum \frac{1}{\alpha_i^m(\alpha_i-1)f'(\alpha_i)} = \sum \frac{1}{\alpha_i^{2n+1}(\alpha_i-1)h\alpha_i^{n-1}} = \frac{1}{n}\sum\frac{1}{\alpha_i-1}$$

Далее

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-\alpha_i} = \frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)} = \frac{n-1}{2}$$

Отсюда

$$\bar{a}_m = 2n+1+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2} = 3n$$

что, очевидно, является правильным ответом.

Вычислительный центр РАН

Վ.Կ. Լեոնտև, Ղ.Լ Մովսիսյան

Չափաքանակի որոշման մի խնդրի մասին

Հոդվածում նկարագրված մոդելի շրջանակներում քննարկվում է կշռային բաժանա-չափիչի օգտագործման ընթացքում առաջացող հարցերից մեկը:

Литература

1. *Егорычев Г.П.* Комбинаторные суммы и метод производящих функций. Красноярск. 1974.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М. Мир. 1964.