

МАТЕМАТИКА

УДК 539.1

В.И. Гаврилов, академик В.С. Захарян, АВ. Субботин

Критерии компактности в пространствах $h_{max}^p, p > 0$

(Представлено 31/X 2001)

Символом U обозначим открытый единичный круг $|z| < 1$ на комплексной плоскости C , а символом T - его границу $|z| = 1$. Для произвольной комплексной функции $U(r)$, определенной в U , величину

$$\sup_{0 \leq r < 1} |U(re^{i\theta})| = (Mu)(e^{i\theta})$$

называют радиальной максимальной функцией

Если функция $U(z)$ непрерывна в круге U , то для произвольной $p > 0$ обозначим

$$\|U_p\| = \sup_{0 \leq r < 1} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

$$\|U_p\|^* = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (Mu)^p(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

Гармоническую в круге U функцию $U(z)$ относят к малому классу Харди $h^p, p > 0$, если $\|U_p\| < \infty$. Аналитическую в круге U функцию $f(z)$ относят к большому классу Харди $H^p, p > 0$, если $\|f_p\| < \infty$, а последнее равносильно тому, что $U, V \in h^p, p > 0$, где $f(z) = U(z) + V(z)$, $z \in U$ (см.[1, §1.1]).

Определение 1. Гармоническую функцию $U(z)$, определенную в круге U , отнесем к классу $h_{max}^p, p > 0$, если $\|U_p\|_p^* < +\infty$, так что вложение $h_{max}^p \subseteq h^p$ справедливо для всех $p > 0$.

Определение 2. Для любой функции $U \in h_{max}^p, p > 0$, функции $U_r, 0 \leq r < 1$, определим формулой

$$U_r(z) = U(rz), \quad z \in U, \quad 0 \leq r < 1.$$

Отметим, что настоящая работа тесно связана со статьей [2] авторов и может считаться ее продолжением.

Определяемая формулой (2) характеристика $\|\cdot\|_p^*$ является абсолютно однородной, так что понятие ограниченности подмножества пространства $h_{max}^p, p > 0$, в линейно-топологическом смысле эквивалентно понятию ограниченности в метрике ρ_p^* . Свойство же полной ограниченности множества в $h_{max}^p, p > 0$, описывается следующей теоремой.

Теорема 1. Для того, чтобы множество $L \subseteq h_{max}^p, p > 0$, было вполне ограниченным относительно метрики ρ_p^* , необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

- а) L ограничено в метрике ρ_p^* ;
- б) функции $u_r, 0 \leq r < 1$, сходятся к функции u при $r \rightarrow 1$ — относительно метрики ρ_p^* равномерно по $u \in L$.

Доказательство. Необходимость. Ограниченность вполне ограниченного множества есть общий факт теории метрических пространств, так что условие а) необходимо.

Чтобы установить необходимость условия б), выберем любое $\varepsilon > 0$ и найдем, согласно условию полной ограниченности множества L , конечную $\varepsilon/3$ -сеть для L , т.е. такое конечное множество $K = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq L$, что для любой функции $u \in L$ найдется $u_k \in K, 1 \leq k \leq N$, такое что $\rho_p^*(u_k, u) \leq \varepsilon/3$. По теореме 4 [2] для этого $\varepsilon > 0$ найдется также число $r_0 \in [0, 1)$, такое что неравенство $\rho_p^*((u_k)_r, u_k) \leq \varepsilon/3$ выполнено при $r \in [r_0, 1)$ для всех $k, 1 \leq k \leq N$, где функции $(u_k)_r, 0 \leq r < 1$, определяются формулой $(u_k)_r(z) = u_k(rz), z \in U$. С другой стороны, в силу оценок $\|u_r\|_p^* \leq \|u\|_p^*, u \in h_{max}^p, p > 0, 0 \leq r < 1$, и неравенства треугольника для метрики ρ_p^* , имеем $\rho_p^*(u_r, u) \leq \rho_p^*(u_r, (u_k)_r) + \rho_p^*((u_k)_r, u_k) + \rho_p^*(u_k, u) \leq 2\rho_p^*(u_k, u) + \rho_p^*((u_k)_r, u_k)$ для любой u и любого $1 \leq k \leq N$. Если номер k подобран так, что $\rho_p^*(u_k, u) \leq \varepsilon/3$, и если $r \in [r_0, 1)$, то, по доказанному выше, получаем оценку $\rho_p^*(u_r, u) \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ для всех $u \in L$ и любого $r \in [r_0, 1)$; т.е. $u_r \rightarrow u$ в метрике ρ_p^* при $r \rightarrow 1$ равномерно по $u \in L$.

Достаточность. Предположим, что для множества $L \subseteq h_{max}^p, p > 0$, выполнены условия а) и б) теоремы. Тогда, согласно теореме 1[2], ограниченным в H^p будет множество функций $\tilde{L} = \{f \in H^p; \operatorname{Re} f \in L, \operatorname{Im} f(0) = 0\}$ и, в силу неравенства 10 [2], семейство $\tilde{L}$ равномерно ограничено на компактах круга U . В силу критерия Монтеля, множество $\tilde{L}$ относительно компактно, а значит, и вполне ограничено в метрике равномерной сходимости на компактах из U . Задав произвольным $\varepsilon > 0$, найдем, согласно условию б), такое $r_0 \in [0, 1)$, что для всех $u \in L$ выполнено $\rho_p^*(u_{r_0}, u) \leq \varepsilon/2$ (где $u_{r_0}(z) = u(r_0 z), z \in U$). Так как семейство $\tilde{L}$ вполне ограничено в метрике равномерной сходимости на компактах в U , то для него существует конечная $(\varepsilon/2)^{1/\alpha_p}$ -сеть ($\alpha_p = \min(1, p)$) в норме

$$\|f\|_{\infty, r_0} = \max_{|z| \leq r_0} |f(z)|;$$

т.е. существует такой набор функций $\{f_1, \dots, f_N\} \subseteq \tilde{L}$, что для любой функции $f \in \tilde{L}$ найдется номер $k, 1 \leq k \leq N$, такой что $\|f - f_k\|_{\infty, r_0} \leq (\varepsilon/2)^{1/\alpha_p}$.

Итак, пусть $u \in L$. Найдем для нее такую функцию $f \in \tilde{L}$, что $\operatorname{Re} f = u$, и выберем номер $1 \leq k \leq N$ так, чтобы было выполнено $\|f - f_k\|_{\infty, r_0} \leq (\varepsilon/2)^{1/\alpha_p}$. Тогда $\rho_p^*(u, (\operatorname{Re} f_k)_{r_0}) \leq \rho_p^*(u, u_{r_0}) + \rho_p^*(u_{r_0}, (\operatorname{Re} f_k)_{r_0}) \leq \rho_p^*(u, u_{r_0}) + \|f_k - f\|_{\infty, r_0}^{\alpha_p} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, т.е. показано, что функции $u_k(\operatorname{Re} f_k)_{r_0}, 1 \leq k \leq N$, образуют ε -сеть множества L в метрике ρ_p^* . Так как конечная ε -сеть построена для любого $\varepsilon > 0$, то множество L вполне ограничено.

Следствие 1. Утверждение теоремы 4 [2] имеет место равномерно на любом компактном множестве функций из $h_{max}^p, p > 0$.

Критерий компактности в пространствах $h_{max}^p, p > 0$, можно сформулировать и в другой форме. Напомним, что условие полной ограниченности множества в полном метрическом пространстве равносильно его относительной компактности (т.е. компактности его замыкания).

Теорема 2. Множество L вполне ограничено в пространстве $h_{max}^p, p > 0$, тогда и только тогда, когда

а) L ограничено в метрике ρ_p^* ;

б) интегралы семейства функций $\{(Mu)^p(e)^{i\theta}, \theta \in [-\pi; \pi]\}_{u \in L}$ равномерно абсолютно непрерывны на $[-\pi; \pi]$; т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_a^{\pi} (Mu)^p(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} < \varepsilon, u \in L,$$

для любого множества e на $[-\pi; \pi]$ лебеговой меры меньше δ ; и

в) для любой последовательности $(u_n) \subseteq L$ существует подпоследовательность $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$, для которой $M(u_{n_k} - u_{n_m}) \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$ по мере.

Доказательство. Необходимость условия а) проверяется так же, как в теореме 1.

Чтобы показать необходимость условия б), предположим, напротив, что интегралы семейства функций $\{(Mu)^p(e)^{i\theta} - \pi \leq \theta \leq \pi\}_{u \in L}$ не являются равномерно абсолютно непрерывными на $[-\pi; \pi]$. Тогда найдется некоторая последовательность функций $(Mu_n)^p, (u_n) \subseteq L$ этого семейства такая, что она сама и любая ее подпоследовательность не имеют равномерно абсолютно непрерывных интегралов. Согласно условию полной ограниченности множества L , существует подпоследовательность (u_{n_k}) последовательности (u_n) , сходящаяся к некоторой функции $u \in h_{max}^p$ в метрике ρ_p^* . Отсюда, в силу неравенства Чебышева,

$$meas\left\{M(u_{n_k} - u) \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{-\pi}^{\pi} \left[M(u_{n_k} - u)\right]^p(e^\theta) d\theta = \frac{2\pi}{\varepsilon^p} \left(\|u_{n_k} - u\|_p^*\right)^{p/\alpha_p} \rightarrow 0,$$

при $k \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, так что последовательность $(Mu_{n_k})(e)^{i\theta}$ сходится к $Mu(e)^{i\theta}$ при $k \rightarrow \infty$ по мере на отрезке $[-\pi; \pi]$. Выбирая, если это необходимо, подпоследовательность, можем считать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Mu_{n_k}(e)^{i\theta} = Mu(e)^{i\theta}$$

почти всюду на $[-\pi; \pi]$. С другой стороны, из сходимости (u_{n_k}) к u при $k \rightarrow \infty$ в метрике ρ_p^* и свойства непрерывности характеристики $\|\cdot\|_p^*$ относительно метрики ρ_p^* имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k}\|_p^* &= \|u\|_p^*, \text{ т. е.} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (Mu_{n_k})^p(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi} (Mu)^p(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с общей предельной теоремой (см., например, [3, Введение]), утверждение (3) имеет место тогда и только тогда, когда последовательность $(Mu_{n_k})^p$ обладает равнове-

пенно абсолютно непрерывными интегралами, что противоречит выбору последовательности (u_n) .

Наконец, условие в) было уже проверено в процессе доказательства необходимости условия б) (см. использованное выше неравенство Чебышева).

Достаточность. Чтобы проверить полную ограниченность множества в метрическом пространстве, достаточно показать, что из любой последовательности его элементов можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Итак, пусть (u_n) - некоторая последовательность функций множества L . Используя свойство в), выделим из нее такую подпоследовательность (u_{n_k}) , чтобы $M(u_{n_k} - u_{n_m}) \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$ по мере на множестве T . Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать, что $M(u_{n_k} - u_{n_m}) \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$ почти всюду на множестве T . В силу элементарного неравенства $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, $a, b, p \geq 0$, имеем оценку $[M(u_{n_k} - u_{n_m})]^p \leq 2^p[(Mu_{n_k})^p + (Mu_{n_m})^p]$, из которой, согласно условию б), заключаем, что двойная последовательность $(M(u_{n_k} - u_{n_m})^p)$ функций на $[-\pi; \pi]$ обладает равномерно абсолютно непрерывными интегралами. В силу предельной теоремы ([3, Введение]), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} [M(u_{n_k} - u_{n_m})]^p (e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 0 \text{ при } k, m \rightarrow \infty$$

или $\|u_{n_k} - u_{n_m}\|_p \rightarrow 0$ при $k, m \rightarrow \infty$, что и означает фундаментальность последовательности (u_{n_k}) в метрике ρ^* .

Замечание 1. В приведенном доказательстве достаточности не использовано условие а), но оно вытекает из условия б).

Замечание 2. При $p > 1$, в силу теоремы М. Рисса и максимальной теоремы Харди - Литтлвуда, нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_p^*$ эквивалентны на $h^p = h_{max}^p$. Поэтому понятия полной ограниченности в порожденных ими топологиях равносильны. Кроме того, пространства h^p при $p > 1$ изометрически изоморфны пространствам L^p на отрезке $[-\pi; \pi]$ с нормированной мерой Лебега. Принимая во внимание критерий полной ограниченности в классах L^p (см. [3, гл. III, § 3, теорема 6]), получим, что множество L вполне ограничено в h_{max}^p , $p > 1$, если, и только если, оно ограничено, интегралы семейства функций $\{|u^*(e^{i\theta})|^p, \theta \in [-\pi; \pi]\}_{u \in L}$ где u^* - радиальные пределы функций $u \in L$, равномерно абсолютно непрерывны на $[-\pi; \pi]$, а семейство функций $\{|u^*(e^{i\theta})|^p, \theta \in [-\pi; \pi]\}_{u \in L}$ - относительно компактно в топологии сходимости по мере на отрезке $[-\pi; \pi]$. Отметим, что в этом критерии, по сравнению с теоремой 2, ослаблены условия б) и в). Это означает, что из условия равномерной абсолютной непрерывности интегралов p -ых степеней радиальных пределов функций некоторого множества функций класса h^p , $p > 1$, и относительной компактности этих радиальных пределов по мере следуют более сильные свойства равномерной абсолютной непрерывности интегралов p -ых степеней радиальных (и даже угловых, если теорему 2 сформулировать в терминах угловых максимальных функций) максимальных функций этого множества и относительной компактности по мере функций этого множества, равномерной на радиусах!

С другой стороны, этот "ослабленный" критерий компактности не может быть распространен на случай $0 < p \leq 1$, как показывает пример последовательности $u_n(z) = p(z^n)$, $z \in U$, где $p(z)$ - функция класса h_1 заданная формулой

$$p(z) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}, \quad |z| < 1 \quad (4)$$

С последним замечанием созвучно наблюдение, что известная теорема Хинчина – Островского (см. [3, гл. II, §7, п. 1]) не может быть прямо перенесена со случая аналитических функций класса Островского - Неванлинны N^1 на гармонические функции класса h^1 (в чем убеждает простой пример последовательности $u_n(z) = (-1)^n p(z)$, $z \in U$, где функция $p(z)$ определена формулой (4)).

Теорема 2, однако, позволяет получить некий аналог этой теоремы.

Теорема 3. Пусть (u_n) - последовательность гармонических в круге U функций класса h^1 , ограниченная в нуле, удовлетворяющая условию

$$\int_{\pi}^{-\pi} u_n^+(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq C, \quad 0 \leq r < 1 \quad (5)$$

для некоторой конечной постоянной $C \geq 0$ и сходящаяся при $n \rightarrow \infty$ равномерно почти на каждом радиусе круга U . Тогда $n \rightarrow \infty$ функции u_n сходятся равномерно на компактах в U к некоторой гармонической функции u , также принадлежащей классу h^1 , причем сходимость имеет место также и в метрике любого пространства h_{max}^p , $0 < p < 1$

Доказательство. Нетрудно видеть, что первое условие теоремы эквивалентно условию $\sup_n \|u_n\|_1 < +\infty$.

Действительно, интегралы

$$\int_{\pi}^{-\pi} u_n(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = u_n(0), \quad 0 \leq r < 1$$

по свойству среднего значения гармонических функций и условию теоремы ограничены по n и $0 \leq r < 1$, следовательно, ограничены и интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u_n(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} u_n^+(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u_n(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Переходя к точной верхней грани по r , получаем искомую ограниченность характеристик $\|u_n\|_1$, $n \in N$.

Для любого $0 < p < 1$, согласно теореме 2 [2], ограничены и характеристики $\|u_n\|_p^*$, $n \in N$, т. е. выполнено условие а) теоремы 2. С помощью неравенства Гельдера нетрудно показать, что из ограниченности интегралов некоторого семейства функций в большей степени следует равностепенная абсолютная непрерывность интегралов этого семейства в меньшей степени, так что для последовательности (u_n) выполнено и второе условие б) теоремы 2. Наконец, условие в) теоремы 2 утверждается вторым условием доказываемой теоремы. По теореме 2, последовательность (u_n) относительно компактна в пространстве h_{max}^p , $0 < p < 1$. Выделим из нее

подпоследовательность (u_{n_k}) , сходящуюся в метрике ρ_p^* к некоторой функции $u \in h_{max}^p$. Согласно теореме 3 [2], эта сходимость равномерна на любом компакте из U . Полагая в (5) $n = n_k$ и устремляя $k \rightarrow \infty$, при фиксированном $0 \leq r < 1$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_n^+(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq C, \quad 0 \leq r < 1,$$

и

$$u(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(0)$$

- конечная величина. Как и в начале доказательства, отсюда следует, что функция u принадлежит пространству h^1 .

Осталось показать, что вся последовательность (u_n) сходится к этой функции u .

Действительно, предположим, что некоторая подпоследовательность $(u_{n'_m})$ последовательности (u_n) обладает свойством $\rho_p^*(u_{n'_m}, u) \geq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Выделим, в силу доказанного свойства относительной компактности (u_n) , подпоследовательность $(u_{n'_i}) \subseteq (u_{n'_m})$, сходящуюся к некоторой функции v пространства h_{max}^p в метрике ρ_p^* . Поскольку, согласно условию теоремы, $M(u_{n_k} - u_{n'_i}) \rightarrow \infty$ при $k, l \rightarrow \infty$ почти всюду на T , то ограничиваясь в определении радиальной максимальной функции M точной верхней гранью до некоторого предела и пользуясь равномерной сходимостью u_{n_k} и $u_{n'_i}$ к u и v , соответственно, на любом компакте из U , имеем

$$\sup_{0 \leq r \leq r_0} |u(re^{i\theta}) - v(re^{i\theta})| = 0$$

для почти всех $\theta \in [-\pi; \pi]$, $0 \leq r_0 < 1$; т. е. $u = v$ на почти всех радиусах круга $|z| \leq r_0$. Так как функции u и v на круге $|z| \leq r_0$ непрерывны, то заключаем, что $u \equiv v$ на любом круге $|z| \leq r_0$, $0 \leq r_0 < 1$. В силу произвольности $0 \leq r_0 < 1$, $u \equiv v$ всюду в круге U , что противоречит предположению $\rho_p^*(u_{n'_m}, u) \geq \varepsilon$ и тому, что $\rho_p^*(u_{n'_i}, v) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

Замечание 3. Утверждение о сходимости в метриках пространств h_{max}^p , $0 < p < 1$ не может быть усилено до утверждения о сходимости в норме пространства h^1 , как показывает пример последовательности функций $u_n(z) = p(ze^{i\alpha_n})$, $z \in U$, где (α_n) - произвольная бесконечно малая последовательность действительных не равных нулю чисел и функция $p(z)$ определена при помощи (4).

Замечание 4. Аналог теоремы 3 справедлив для функций классов h_{max}^p , $0 < p < 1$. если условие (5) заменить на условие ограниченности (u_n) в пространствах h_{max}^p и утверждение о сходимости в метриках пространств h_{max}^p для $0 < p < 1$ - на утверждение о сходимости в метриках пространств $h_{max}^{p'}$ любого p' , $0 < p' < p$.

Московский государственный университет им. М.Аомоносова

Государственный инженерный университет Армении

Վ.Ի. Գավրիլով, ակադեմիկոս Վ.Ս. Ջաքարյան, Ա.Վ. Սուրոտին

Կոմպակտության սկզբունքներ $h_{max}^p, p > 0$ տարածություններում

Սահմանվում են $h_{max}^p, p > 0$, դասերը, որոնք ընկնում են Հարդիի $h^p, p > 0$, հարմոնիկ ֆունկցիաների դասերի մեջ:

Բերվում է $h_{max}^p, p > 0$, դասում բազմության լրիվ սահմանափակ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Կոմպակտության սկզբունքները $h_{max}^p, p > 0$, տարածությունում ձևակերպված են նաև այլ տեսքով:

Աշխատանքը իր բնույթով կարելի է համարել հեղինակների [2] աշխատանքի շարունակությունը:

Литература

1. *Duren P.L.* - Theory of H^p spaces. N.-Y. - L. Acad. Press. 1970. XII. 258 p.
2. *В.И. Гаврилов, В.С. Захарян, А.В. Субботин.* - ДНАН Армении. 2002. Т. 102. N3. С.203-210
3. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. М.-Л. ГИТТЛ. 1950. 336 с.