

А. С. Погосян

О Колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле

(Представленно академиком В.С. Саркисяном 18/VI 2002)

Пусть трансверсально-изотропная упругая пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью $\sigma(\sigma, \sigma, \sigma')$ колеблется во внешнем магнитном поле с постоянным вектором магнитной индукции $\vec{B}(0, 0, B_3)$, нормальным к срединной плоскости пластинки. Прямоугольная система координат хуз выбрана так, что координатная плоскость хуо совпадает со срединной плоскостью, к которой параллельна плоскость изотропии. Принимается что сторонние токи и заряды отсутствуют, электромагнитные свойства, среды окружающей пластинку, эквивалентны свойствам вакуума и что магнитная проницаемость $\mu = 1$. При этом, предполагая, что электромагнитное поле в пластинке во времени изменяется не слишком быстро, пренебрегаем токами смещения по сравнению с токами проводимости.

Принимая гипотезу уточненной теории изгиба пластин [1], из уравнений движения пластинки с учетом сил электромагнитного происхождения [2] будем иметь следующие уравнения:

$$D \Delta \Delta W + 2\rho h \left(1 - \frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2Eh^2}{5G'(1-\nu^2)} \Delta + \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} =$$

$$= - \frac{\sigma B_3}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^h h_3 z dz + \frac{2\sigma h B_3^2}{c^2} \left(\frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\Delta F - \frac{5G'}{2Gh^2} F - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = - \frac{5G'}{2Gh^2} \frac{\sigma B_3}{c} \left[\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial e_1}{\partial x} + \frac{\partial e_2}{\partial y} \right) z dz - \frac{B_3}{c} \frac{2h^2}{5G'} \frac{\partial F}{\partial t} \right], \quad (2)$$

где $D = [(2Eh^2)/(3(1 - \nu^2))]$ - жесткость пластинки; $G = [E/(2(1 + \nu))]$ - модуль сдвига в плоскости изотропии; G' - модуль сдвига для плоскостей, перпендикулярных плоскости изотропии; $F = [(\partial \Phi)/(\partial y)] - [(\partial \Psi)/(\partial x)]$; Φ, Ψ - функции, характеризующие поперечные сдвиговые деформации пластинки.

К этим уравнениям следует присоединить линеаризованные уравнения электродинамики как во внутренней, так и во внешней областях пластинки [2,3], со следующими условиями на

поверхностях ($z = \pm h$):

$$e_i = e_i^{(e)}, \quad h_i = h_i^{(e)}, \quad h_3 = h_3^{(e)} \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

и условием на бесконечности

$$h_i, e_i \rightarrow 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \pm\infty. \quad (4)$$

Рассматривая решения типа гармонических волн

$$\{W, F\} = \{W_0, F_0\} e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)}, \quad W_0, F_0 = \text{const},$$

$$\{e_i, h_i\} = \{e_{i0}(z), h_{i0}(z)\} e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5)$$

из вышеперечисленных уравнений и соотношений будем иметь:

для определения частоты поперечных колебаний согласно (1)

$$\begin{aligned} & Dr^4 - 2\rho h \omega^2 \left(1 + \frac{h^2 r^2}{3} + \frac{2E h^2 r^2}{5G'(1-\nu)} - \frac{2\rho h^2}{5G'} \omega^2 \right) = \\ & = - \frac{2\sigma h B_3^2 i \omega}{c^2} \frac{h^2 r^2}{3} \left[1 - \frac{4\pi \sigma i \omega}{\chi^2 c^2} \left(1 - \frac{\delta(1+rh)}{\chi h \chi h + rh sh \chi h} \right) \right] + \\ & + \frac{2\sigma h B_3^2 i \omega}{c^2} \frac{2\rho h^2}{5G'} \omega^2 \left[1 - \frac{4\pi \sigma i \omega}{\chi^2 c^2} \left(1 - \frac{5}{\chi^2 h^2} \left(1 - \frac{\delta(1+rh(1-h^2 \chi^2/3))}{\chi h \chi h + rh sh \chi h} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Если не учитывать поперечные сдвиговые деформации $G' \rightarrow \infty, r^2 h^2 \ll 1$, то из (6) получим

$$Dr^4 - 2\rho h \omega^2 = - \frac{2\sigma h B_3^2 i \omega}{c^2} \frac{h^2 r^2}{3} \left[1 - \frac{4\pi \sigma i \omega}{\chi^2 c^2} \left(1 - \frac{\delta(1+rh)}{\chi h \chi h + rh sh \chi h} \right) \right], \quad (7)$$

что совпадает с выражениями полученными в [3,4];

для определения частоты сдвиговых колебаний согласно (2)

$$\begin{aligned} & \omega^2 - \frac{5G'}{2\rho h^2} \left(1 + \frac{2h^2 r^2}{5} \frac{G}{G'} \right) = \\ & = \frac{\sigma B_3^2 i \omega}{c^2} \left[1 + \frac{5}{2\chi^2 h^2} \left(1 - \frac{4\pi \sigma \chi_0 h + i \omega \chi^2 h^2}{\chi h (4\pi \sigma \chi_0 h \chi h + i \omega \chi h sh \chi h)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\chi^2 = r^2 + [(4\pi \sigma i \omega)/(c^2)]$, $\chi_0^2 = r^2 - [(\omega^2)/(c^2)]$, $\delta = [(3(\chi h \chi h - sh \chi h))/(\chi^2 h^2)]$, $r^2 = k_1^2 + k_2^2$,

для простоты принято $\sigma' = \sigma$.

Разлагая соответствующие функции в асимптотический ряд по параметру $|\chi|h$ и пренебрегая членами порядка $|\chi|^3 h^3$ по сравнению с единицей

$$|\chi|^3 h^3 \ll 1, \quad (9)$$

для определения частоты поперечных колебаний из (6) получим

$$\begin{aligned} Dr^4 - 2\rho h \omega^2 \left(1 + \frac{h^2 r^2}{3} + \frac{2Eh^2 r^2}{5G'(1-\nu)} - \frac{2\rho h^2}{5G'} \omega^2 \right) = \\ = - \frac{2\sigma h B_3^2 i \omega}{c^2} \left[\frac{h^2 r^2}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{4\pi \sigma i \omega h^2}{c^2(1+rh+\chi^2 h^2/2)} \right) \right] - \\ = - \frac{2\rho h^2}{5G'} \omega^2 \left[1 - \frac{2}{5} \frac{4\pi \sigma i \omega}{c^2 \chi^2 (1+rh+\chi^2 h^2/2)} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

из (7) получим

$$Dr^4 - 2\rho h \omega^2 = - \frac{2\sigma h B_3^2 i \omega}{c^2} \frac{h^2 r^2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \frac{4\pi \sigma i \omega h^2}{c^2(1+rh+\chi^2 h^2/2)} \right]. \quad (11)$$

Исходя из того, что пренебрежение токами смещения означает выполнение условия $4\pi\sigma \gg |\dot{\omega}|$ и принимая более слабое условие $4\pi\sigma rh \gg |\dot{\omega}\chi^2|h^2$ для частот, характеризующих сдвиговые колебания пластинки, получим (в приближении (9))

$$\left[\omega^2 - \frac{5G'}{2\rho h^2} \left(1 + \frac{2h^2 r^2}{5} \frac{G}{G'} \right) \right] \left(1 + \frac{h^2 \chi^2}{2} \right) = \frac{\sigma B_3^2 i \omega}{\rho c^2}. \quad (12)$$

Отметим, что (10), (11) и (12) получены без принятия каких-либо гипотез относительно компонент электромагнитного поля.

Принимая линейный закон изменения компонент электромагнитного поля [5]

$$e_1 = \varphi + z\varphi_1, \quad e_2 = \psi + z\psi_1, \quad h_3 = f + zf_1, \quad (13)$$

из уравнений (1), (2) и уравнений электродинамики во внутренней области получим [6]

$$\begin{aligned}
& D \Delta \Delta W + 2\rho h \left(1 - \frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2Eh^2}{5G'(1-v^2)} \Delta + \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \\
& = - \frac{2h^3}{3} \frac{\sigma B_3}{c^2} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{2\sigma h B_3^2}{c^2} \left(\frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial W}{\partial t} \\
& \left(1 - \frac{h^2}{3} \Delta + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \right) f_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \right) = \\
& = - \frac{4\pi\sigma B_3}{c^2} \left(\frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial W}{\partial t}, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta F - \frac{5G'}{2Gh^2} F - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = - \frac{5G'}{2Gh^2} \frac{\sigma B_3}{c} \left[g_1 - \frac{B_3}{c} \frac{2h^2}{5G'} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \\
& g_1 + \frac{c}{4\pi\sigma'} \left(\Delta - \frac{4\pi\sigma'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[H^+ - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{h^2}{3} \left(g_1 - \frac{B_3}{c} \frac{2h^2}{5G'} \frac{\partial F}{\partial t} \right) \right] = 0, \tag{15}
\end{aligned}$$

где $g_1 = [(\partial\phi_1)/(\partial x)] + [(\partial\psi_1)/(\partial y)]$, $H^+ = [(\partial)/(\partial y)][(h_1^+ + h_1^-)/2h] - [(\partial)/(\partial x)][(h_2^+ + h_2^-)/2h]$.

К этим уравнениям также следует присоединить уравнения электродинамики во внешней области с условиями (3),(4).

Представляя искомые функции в виде (5), из перечисленных уравнений и соотношений для величин $h_{i0}^+ + h_{i0}^-$ ($i = 1, 2$) получим

$$\frac{h_{10}^+ + h_{10}^-}{2h} = - \frac{i\omega}{c\chi_0} \psi_{10} + \frac{ik_1}{\chi_0} f_{10}, \quad \frac{h_{20}^+ + h_{20}^-}{2h} = - \frac{i\omega}{c\chi_0} \phi_{10} + \frac{ik_2}{\chi_0} f_{10}. \tag{16}$$

Если же относительно характера изменения компонент электромагнитного поля в окружающей среде принять дополнительное допущение [2,3], то получим выражения [6]

$$\sqcap(h_1^+ + h_1^-) = \frac{2h}{\lambda} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right), \quad \sqcap(h_2^+ + h_2^-) = \frac{2h}{\lambda} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right), \tag{17}$$

где $\sqcap \equiv [(\partial^2)/(\partial x^2)] + [(\partial^2)/(\partial y^2)] - [1/(c^2)][(\partial^2)/(\partial t^2)]$.

Откуда с помощью (5) получим

$$\frac{h_{10}^{+} + h_{10}^{-}}{2h} = -\frac{i\omega}{c\lambda\chi_0^2} \psi_{10} + \frac{ik_1}{\lambda\chi_0^2} f_{10}, \quad \frac{h_{20}^{+} + h_{20}^{-}}{2h} = \frac{i\omega}{c\lambda\chi_0^2} \varphi_{10} + \frac{ik_2}{\lambda\chi_0^2} f_{10}. \quad (18)$$

Сравнивая (16) и (18), замечаем, что выражения для $h_{i0}^{+} + h_{i0}^{-}$ совпадут, если за характерный размер принять $\lambda = \chi_0^{-1}$ (в случае $\omega^2 c^{-2} \ll r^2$, $\lambda = r^{-1}$).

Согласно (14,15,17) задачи определения величин W, f_1 и F, φ_1, ψ_1 распадаются:

$$\begin{aligned} & D \Delta \Delta W + 2\rho h \left(\left(1 - \frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2Eh^2}{5G'(1-v^2)} \Delta + \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \right. \\ & \quad \left. = -\frac{2h^3}{3} \frac{\sigma B_3}{c^2} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{2\sigma h B_3^2}{c^2} \left(\frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial W}{\partial t}, \right. \\ & \quad \left[\left(\left(1 + \frac{h}{\lambda} - \frac{h^2}{3} \Delta + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \right) f_1 + \frac{4\pi\sigma B_3}{c^2} \left(\frac{h^2}{3} \Delta - \frac{2\rho h^2}{5G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial W}{\partial t} \right) \right] = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \Delta F - \frac{5G'}{2Gh^2} F - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\frac{5G'}{2Gh^2} \frac{\sigma B_3}{c} \left[g_1 - \frac{B_3}{c} \frac{2h^2}{5G'} \frac{\partial F}{\partial t} \right], \\ & g_1 + \frac{c}{4\pi\sigma'} \left(\Delta - \frac{4\pi\sigma'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[H^+ - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{h^2}{3} \left(g_1 - \frac{B_3}{c} \frac{2h^2}{5G'} \frac{\partial F}{\partial t} \right) \right] = 0, \\ & \square H^+ = -\frac{1}{\lambda c} \frac{\partial g_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20)$$

Представляя искомые функции в виде (5), из (19) и (20) получим

$$\begin{aligned} & Dr^4 - 2\rho h \omega^2 \left(\left(1 - \frac{h^2 r^2}{3} + \frac{2Eh^2 r^2}{5G'(1-v^2)} - \frac{2\rho h^2}{5G'} \omega^2 \right) = \right. \\ & \quad \left. = -\frac{2\sigma h B_3^2 i\omega}{c^2} \left(\frac{h^2 r^2}{3} - \frac{2\rho h^2}{5G'} \omega^2 \right) \left[1 - \frac{4\pi\sigma i\omega h^2}{3c^2(1+rh+\chi^2 h^2/3)} \right] \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\left[\omega^2 - \frac{5G'}{2\rho h^2} \left(1 + \frac{2h^2 r^2}{5} \frac{G}{G'} \right) \right] \left(1 + \frac{h^2 \chi^2}{3} \right) = \frac{\sigma B_3^2 i \omega}{\rho c^2}. \quad (22)$$

Если в (21) не учитывать поперечные сдвиговые деформации то имеем

$$Dr^4 - 2\rho h \omega^2 = - \frac{2\sigma h B_3^2 i \omega}{c^2} \frac{h^2 r^2}{3} \left[1 - \frac{4\pi \sigma i \omega h^2}{3c^2(1 + rh + \chi^2 h^2/3)} \right]. \quad (23)$$

Сравнивая (11) с (23) и (12) с (22), замечаем, что они почти совпадают, т.е. линейный закон изменения компонент e_1, e_2, h_3 в этих задачах соответствует приближению $|\chi|^3 h^3 \ll 1$.

Отметим, что задача поперечных колебаний электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле в рамках классической теории пластин исследована в работах [3,4] - показано, что точность гипотезы магнитоупругости тонких тел соответствует приближению $|\chi|^2 h^2 \ll 1$.

В работе [7], принимая уточненную теорию пластин и применяя операторный метод в комплексе с методом усреднения для компонент индуцированного электромагнитного поля e_1, e_2, h_3 , получен кубический закон изменения. Пренебрегая инерцией вращения, обусловленной учетом поперечных деформаций, для определения относительной частоты поперечных колебаний шарнирно опертой по краям пластинки полосы (шириной a) получено следующее характеристическое уравнение:

$$\left(2\beta_0 h_* + \frac{v_0 H_*}{3\delta_3} \right) \Omega^3 + H_* \Omega^2 + \left(2\beta_0 + \frac{v_0}{3\delta_3} \right) \Omega + 1 = 0, \quad (24)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-v^2)}} h \lambda_m^2, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad h_* = \frac{2Eh^2 \lambda_m^2}{5G'(1-v^2)}, \quad v_0 = \frac{4\pi\sigma\omega_0 h^2}{c^2},$$

$$H_* = 1 + h_* + \frac{h^2 \lambda_m^2}{3}, \quad \delta_3 = \frac{5(\lambda + h)}{6\lambda + h} + \frac{\lambda_m^2 h^2}{3}.$$

На основе уточненной теории пластин и линейного закона изменения компонент e_1, e_2, h_3 (уравнения (14)), в работе [6] для аналогичной задачи получено характеристическое уравнение

$$\left(2\beta_0 h_* + \frac{v_0 H_*}{3\delta_1} \right) \Omega^3 + H_* \Omega^2 + \left(2\beta_0 + \frac{v_0}{3\delta_1} \right) \Omega + 1 = 0, \quad (25)$$

$$\delta_1 = 1 + h\lambda_m + \frac{h^2 \lambda_m^2}{3}.$$

Сравнивая (24) с (25), замечаем, что они отличаются лишь коэффициентом δ_1 (1,3), при этом (в (1.9) принимая $\lambda = \lambda_m^{-1}$) $\delta_3 = \delta_1 - [(\lambda_m h(1 + \lambda_m h))/(6 + \lambda_m h)]$.

Таким образом, уравнение (24) (полученное с помощью линейного закона (13)) и уравнение (25) (полученное с помощью операторного метода) качественно аналогичны.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. С. В. Саркисяну за ценные советы и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Литература

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
3. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесущих пластин. Изд. АН Армении, Ереван. 1992. 123 с.
4. Мкртчян П. А. - Изв. АН АрмССР. 1983. Т. 36. N6. С. 39-49.
5. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Наука. 1996. 286 с.
6. Саркисян С. В., Погосян А. С. Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. N1. С. 59-65.
7. Саркисян В. С., Саркисян С. В., Джилаван С. А., Саргсян А. Л. - Механика. Межвуз. сб. науч. трудов, Вып.8. Ереван. ЕГУ. 1991. С. 49-60.

Ա. Ս. Պողոսյան

Լայնական մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ սալերի տատանումների մասին

Ուսումնասիրվում է լայնական մագնիսական դաշտում գտնվող տրանսվերսալ-
իզոտրոպ էլեկտրահաղորդիչ սալի տատանումների խնդիրը լայնական սահքի դեֆոր-
մացիաների հաշվառումով: Դիտարկված մասնավոր խնդիրների համար կատարված է
ինչպես ինդուկցված էլեկտրոմագնիսական դաշտի բաղադրիչների ըստ սալի հաստու-
թյան գծային փոփոխման օրենքի, այնպես էլ շրջապատող միջավայրում ինդուկցված
էլեկտրոմագնիսական դաշտի բաղադրիչների փոփոխման բնույթի վերաբերյալ ընդու-
նեղության մոտավորությունների ճշտության համամատական վերլուծություն: