

УДК 539.3

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян

Контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальными соосными конечными и полубесконечными разрезами

(Представлено академиком Б. Л. Абрамяном 28/ IX 2001)

В работе рассматривается плоская контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости ($x \geq 0$, $|z| < \infty$) с вертикальными соосными конечным ($0 < x < b$) и полубесконечным ($c < x < \infty$) разрезами. На конечном участке границы ($|z| \leq a$) полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разрезов ($z = 0$). Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что на границе полуплоскости вне штампа ($|z| > a$) и конечном разрезе ($0 < x < b$) действует только нормальное давление.

Рассматривается плоское деформированное состояние ($\bar{U}_y = 0$, $[(\partial[\bar{U}])]/(\partial y) = 0$), и задача решается в перемещениях методом Фурье. Решение представлено в виде суперпозиции решений а) симметричной и б) кососимметричной задачи относительно оси разрезов ($z = 0$). Решение каждой из этих задач представлено в виде сумм интегралов Фурье. Поиск произвольных функций интегрирования в каждой задаче в конечном счете сводится к решению системы из парных и тройных интегральных уравнений, которое в свою очередь сводится к решению интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. Показана разрешимость последних для конкретного ортотропного материала.

а. Рассматривается симметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости с вертикальными соосными конечным и полубесконечным разрезами. Так как задача симметрична относительно оси $z = 0$, то можно ограничиться рассмотрением только правого квадранта ($0 < x < \infty$, $0 < z < \infty$).

Граничные условия для квадранта имеют вид:

$$\tau_{zx}(0, z) = 0 \quad (0 < z < \infty), \quad \tau_{zx}(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty), \quad (1)$$

$$U_x(0, z) = f_1(z) \quad (0 < z \leq a), \quad \sigma_x(0, z) = f_2(z) \quad (a < z < \infty), \quad (2)$$

$$\sigma_z(x, 0) = f_3(x) \quad (0 < x < b), \quad U_z(x, 0) = 0 \quad (b \leq x \leq c), \quad \sigma_z(x, 0) = 0 \quad (c < x < \infty). \quad (3)$$

Решение задачи ищем в виде сумм интегралов Фурье:

$$C_{11}U_x(x,z) = \int_0^{\infty} \alpha \overline{U}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha + \int_0^{\infty} \beta \overline{U}^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta, \quad (4)$$

$$C_{44}U_z(x,z) = \int_0^{\infty} \alpha \overline{W}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^{\infty} \beta \overline{W}^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta.$$

Плотности интегралов Фурье (4), затухающие в глубь полуплоскости, определяются в виде:

$$\overline{U}(\alpha, z) = \sum_{j=1}^2 \Delta_1(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}, \quad \overline{U}^*(\beta, x) = \sum_{k=1}^2 \Delta_1(t_k) t_k^{-2} B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}}, \quad (5)$$

$$\overline{W}(\alpha, z) = \sum_{j=1}^2 \Delta_2(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}, \quad \overline{W}^*(\beta, x) = \sum_{k=1}^2 \Delta_2(t_k) B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}}.$$

Здесь $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$ - неизвестные функции интегрирования, которые определяются из граничных условий (1)-(3), а $\Delta_1(t_k)$ и $\Delta_2(t_k)$ - по формулам:

$$\Delta_1(t_k) = \left(\frac{c_{13}}{c_{44}} + 1 \right) t_k, \quad \Delta_2(t_k) = 1 - \frac{c_{44}}{c_{11}} t_k^2, \quad (6)$$

где t_k определяется из решения следующего биквадратного уравнения (причем $\text{Re} t_k > 0$):

$$\frac{c_{33}}{c_{11}} t^4 + \left(\frac{c_{13}^2}{c_{44}c_{11}} + 2 \frac{c_{13}}{c_{11}} - \frac{c_{33}}{c_{44}} \right) t^2 + 1 = 0. \quad (7)$$

Здесь c_{11} , c_{13} , c_{33} , c_{44} - модули упругости ортотропного материала.

Используя основные соотношения теории упругости [1] для исследуемой среды и (4), (5), можно все компоненты тензора напряжений выразить через $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$.

Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем [2]:

$$B_k(\beta) = b_k B_1(\beta), \quad (8)$$

$$A_j(\alpha) = a_j A_j(\alpha) + \frac{2}{\pi} \frac{P_j}{a_{12}} \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^2 b_{1k} b_k t_k^2 \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta, \quad (9)$$

где

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\frac{b_{11}}{b_{12}}, \quad a_1 = 1, \quad P_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad P_2 = 1, \quad (10)$$

$$b_{ik} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} - \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k}, \quad a_{ij} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \Delta_1(t_j) t_j + \Delta_2(t_j).$$

Имея в виду (8) и удовлетворяя смешанным граничным условиям (2), получаем следующие парные интегральные уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) \sin \beta z d\beta = \frac{c_{11}}{n_{11}} f_1(z) \quad (0 < z \leq a), \\ \int_0^{\infty} \beta^2 B_1(\beta) \sin \beta z d\beta = -\frac{1}{n_{12}} f_2(z) + \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{2j} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z} d\alpha \quad (a < z < \infty), \end{array} \right. \quad (11)$$

где

$$n_{11} = \sum_{k=1}^2 \Delta_1(t_k) t_k^{-2} b_k, \quad n_{12} = \sum_{k=1}^2 b_{2k} b_k, \quad (12)$$

$$b_{2k} = \Delta_1(t_k) t_k^{-3} + \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_k), \quad a_{2j} = \Delta_1(t_j) - \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_j) t_j.$$

Удовлетворяя смешанным граничным условиям (3) и имея в виду соотношения (8), (9), получаем следующие тройные интегральные уравнения [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \alpha^2 A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = f_3(x) \quad (0 < x < b), \\ 0 \\ \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = f(x) \quad (b \leq x \leq c), \\ 0 \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 A(\alpha) \cos d x d\alpha = 0 \quad (c < x < \infty), \\ 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

где

$$A(\alpha) = a_{31} A_1(\alpha) + a_{32} A_2(\alpha), \quad (14)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^2 b_{1k}^* b_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} d\beta, \quad (15)$$

$$a_{3j} = \frac{c_{13}}{c_{11}} \Delta_1(t_j) - \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_j) t_j, \quad b_{1k}^* = \frac{2}{\pi} m b_{1k} t_k - \Delta_2(t_k), \quad m = \frac{\Delta_2(t_1) a_{32} - \Delta_2(t_2) a_{31}}{\Delta_2(t_1) a_{12} - \Delta_2(t_2) a_{11}}. \quad (16)$$

Из соотношений (9) и (14) можно получить

$$A_j(\alpha) = a_j^* A(\alpha) + \frac{2}{\pi} \frac{P_j^*}{\alpha} \sum_{k=1}^2 b_{1k} b_k t_k^2 \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta; \quad (17)$$

здесь

$$a_j^* = \frac{a_{12}}{a_{31} a_{12} - a_{32} a_{11}}, \quad P_j^* = \frac{P_j}{a_{12}} - \frac{a_{31} a_j}{a_{31} a_{12} - a_{32} a_{11}}. \quad (18)$$

Решение поставленной задачи сведено к решению систем из парных (11) и тройных (13) интегральных уравнений, имея в виду также интегральное соотношение (17).

Подобные парные интегральные уравнения рассматривались в работах [3-5]. Используя результаты работы [5], решая (11) методом преобразующих операторов для неизвестной функции $B_1(\beta)$, получаем следующее соотношение:

$$B_1(\beta) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \varphi_1(r) J_0(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\infty} r \varphi_2(r) J_0(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\infty} r F(r) J_0(\beta r) dr, \quad (19)$$

где

$$\varphi_1(r) = \frac{c_{11}}{n_{11}} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{zf_1(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz, \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{n_{12}} \int_r^{\infty} \frac{f_2(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz, \quad (20)$$

$$F(r) = \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{21} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_j(\alpha) K_0(\alpha t_j r) d\alpha, \quad (21)$$

$J_0(\beta r)$ - функция Бесселя первого рода с действительным аргументом,

$K_j(\alpha r)$ - функция Макдональда.

Тройные интегральные уравнения, подобные (13), рассматривались в работах [6-9].

Следуя [9], из (13) получаем:

$$A(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* J_{2k+1}(c\alpha), \quad (22)$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{2n+1} A_n = \int_0^{\lambda} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{\theta} \frac{\psi(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi \cos \theta}} + \int_{\lambda}^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_{\theta}^{\pi} \frac{G(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} \quad (23)$$

где

$$A_n(2n+1) = (-1)^n A_n^*, \quad \psi(\varphi) = \sum_{k=1}^2 b_{1k}^* b_k t_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) \left(1 - e^{-[(\beta c)/(t_k)] \cos \varphi / 2} \right) d\beta, \quad (24)$$

$$G(\varphi) = \int_{\varphi}^{\pi} g(\varphi) d\varphi + c_1, \quad g(\varphi) = -\frac{c}{2} \int_{\theta}^{c \cos \varphi / 2} f_3(c \cos \varphi / 2) \sin(\varphi / 2) d\varphi, \quad c_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n,$$

P_n - полином Лежандра.

Имея в виду (17), (21), (23), (24), исключая $A(\alpha)$ из (19) и (22), для определения $B(\beta) = \beta B_1(\beta)$

получаем следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$B(\beta) = \Omega(\beta) + \int_0^{\infty} K(\gamma, \beta) B(\gamma) d\gamma, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(\beta) = & -\frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi_1(r) J_0(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r \varphi_2(r) J_0(\beta r) dr + \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{2j} a_j^* \int_a^{\infty} r J_0(\beta r) dr \int_0^{\infty} \alpha^2 \omega_1(\alpha) K_0(\alpha t_j r) d\alpha, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} K(\beta, \gamma) = & -\frac{2}{\pi} \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{2j} a_j^* \int_a^{\infty} r J_0(\beta r) dr \int_0^{\infty} \alpha^2 \omega_1(\alpha, \gamma) K_0(\alpha t_j r) d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi^2} \frac{\gamma}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{2j} P_j^* \sum_{k=1}^2 b_{1k} b_k t_k^2 \int_a^{\infty} r J_0(\beta r) dr \int_0^{\infty} \frac{\alpha K_0(\alpha t_j r)}{\gamma^2 + \alpha^2 t_k^2} d\alpha; \end{aligned} \quad (27)$$

здесь

$$\begin{aligned} \omega_1(\alpha) = & \frac{1}{\pi \sqrt{2\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 J_{2n+1}(c\alpha) \int_{\lambda}^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_{\theta}^{\pi} \frac{G(\varphi)}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} d\varphi, \\ \omega_2(\alpha) = & \frac{1}{\pi \sqrt{2\alpha}} \sum_{k=1}^2 b_{1k}^* b_k t_k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 J_{2n+1}(c\alpha) \int_0^{\lambda} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \times \\ & \times \int_0^{\theta} \frac{1 - e^{-\frac{\gamma c \cos \varphi / 2}{t_k}}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi. \end{aligned} \quad (28)$$

Очевидно, что функция $\Omega(\beta)$ ограничена сверху и стремится к нулю, когда $\beta \rightarrow \infty$.

Используя значения интегралов [2]:

$$\int_0^{\infty} r K_0(\alpha r) J_0(\beta r) dr = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \int_0^{\infty} r^2 K_1(\alpha r) J_0(\beta r) dr = \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

и результатов [9], можно показать разрешимость уравнений (25) для каждого конкретного ортотропного материала.

Решая уравнения (25) определим $B(\beta) = \beta B_1(\beta)$, а потом можно по формулам (24), (23), (22), (17) и (8) определить все искомые функции и, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

б. Рассматривается кососимметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости с вертикальными соосными конечным и полубесконечным разрезами.

В этом случае граничные условия для правого квадранта имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}(0, z) &= 0 \quad (0 < z < \infty), \quad \sigma_z(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty), \\ U_x(0, z) &= f_4(z) \quad (0 < z \leq a), \quad \sigma_x(0, z) = f_5(z) \quad (a < z < \infty), \\ \tau_{xz}(x, 0) &= 0 \quad (0 < x < b, \quad c < x < \infty), \quad U_x(x, 0) = 0 \quad (b \leq x \leq c). \end{aligned} \quad (29)$$

Решение задачи ищем в виде:

$$\begin{aligned} c_{11} U_x(x, z) &= \int_0^{\infty} \alpha \overline{U}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha + \int_0^{\infty} \beta \overline{U}^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta, \\ c_{44} U_z(x, z) &= \int_0^{\infty} \alpha \overline{W}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^{\infty} \beta \overline{W}^*(\beta, x) \sin \beta z d\beta \end{aligned} \quad (30)$$

Плотности интегралов Фурье (30) определяются по формулам (5).

Удовлетворяя граничным условиям (29), получаем следующие системы из парных и тройных интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) \cos \beta z d\beta &= \frac{c_{11}}{n_{11}} f_1(z) \quad (0 \leq z \leq a), \\ \int_0^{\infty} \beta^2 B_1(\beta) \cos \beta z d\beta &= -\frac{1}{n_{12}} f_2(z) + \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{2j} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z} d\alpha \quad (a < z < \infty), \end{aligned} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \alpha^2 [a_{11} A_1(\alpha) + a_{12} A_2(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = 0 \quad (0 < x < b, c < x < \infty), \\ \int_0^{\infty} \alpha [\Delta_1(t_1) A_1(\alpha) + \Delta_1(t_2) A_2(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = \\ = - \sum_{k=1}^2 \Delta_1(t_k) t_k^{-2} b_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} d\beta \quad (b \leq x \leq c) \end{array} \right. \quad (32)$$

и интегральные соотношения

$$A_j(\alpha) = a_j A_1(\alpha) - \frac{2}{\pi} \frac{p_j}{a_{32}} \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^2 b_{3k} b_k t_k \int_0^{\infty} \frac{\beta^3 B_1(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta, \quad (33)$$

а также зависимость (8), где

$$b_{3k} = - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^3} + \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_k). \quad (34)$$

Решая (31) методом преобразующих операторов [10], получим

$$B_1(\beta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_0^a \varphi_3(r) J_1(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_a^{\infty} \varphi_4(r) J_1(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_a^{\infty} F_1(r) J_1(\beta r) dr; \quad (35)$$

здесь

$$\begin{aligned} \varphi_3(r) &= -r \frac{d}{dr} \frac{c_{11}}{n_{11}} \int_0^r \frac{f_4(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz, & \varphi_4(r) &= \frac{1}{n_{12}} \int_r^{\infty} \frac{z f_5(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz, \\ F_1(r) &= - \frac{r}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{2j} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_j(\alpha) K_1(\alpha t_j r) d\alpha. \end{aligned} \quad (36)$$

После некоторых простейших преобразований (32) можно привести к виду [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int\limits_0^{\infty} \alpha^2 A(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = 0 \quad (0 < x < b, \quad c < x < \infty), \\ \int\limits_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = f^*(x) \quad (b \leq x \leq c), \end{array} \right. \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= a_{11} A_1(\alpha) + a_{12} A_2(\alpha), \quad m_1 = \frac{\Delta_1(t_1) a_{12} - \Delta_1(t_2) a_{11}}{\Delta_1(t_1) a_{32} - \Delta_1(t_2) a_{31}} \\ b_{3k}^* &= m_1 b_{3k} t_k - \Delta_1(t_k) t_k^{-2}, \\ f^*(x) &= -m_1 \sum_{k=1}^2 b_{3k} b_k t_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) d\beta + \sum_{k=1}^2 b_{3k}^* b_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} d\beta. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя результат работы [11], из (37) получаем

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \omega(\alpha, \beta) \beta B_1(\beta) d\beta, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \sum_{k=1}^2 b_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)^2 J_{2n+1}(c\alpha)}{(c\alpha)} \int_0^{\lambda} \frac{P_n(\cos \theta)}{\sin \theta} d\theta \times \\ &\times \int_0^{\theta} \frac{-m_1 b_{3k} t_k + b_{3k}^* e^{-\beta c \cos(\varphi/2) t_k^{-1}}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi. \end{aligned} \quad (40)$$

Используя соотношения (39), (38) и (33), можно получить выражение

$$\begin{aligned}
A_j(\alpha) = & \frac{1}{\alpha^2} \frac{a_{32}}{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}} a_j \int_0^\infty \omega(\alpha, \beta) \beta B_1(\beta) d\beta + \\
& + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}} a_j - \frac{P_j}{a_{32}} \right) \sum_{k=1}^2 b_{3k} b_k t_k \int_0^\infty \frac{\beta^3 B_1(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta.
\end{aligned} \quad (41)$$

Имея в виду (36), исключая $A_j(\alpha)$ из (35) и (41), для определения $B(\beta) = \beta B_1(\beta)$ получим интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода (25).

Свободные члены и ядро интегрального уравнения выражаются следующими формулами:

$$\Omega(\beta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi_3(r) J_1(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \varphi_4(r) J_1(\beta r) dr, \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
K(\beta, \gamma) = & -\frac{2}{\pi} \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^2 a_{2j} \int_a^\infty r J_1(\beta r) dr \int_0^\infty \left[\frac{a_{32} a_j}{a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}} \omega(\alpha, \gamma) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{\pi} P_j^{**} \sum_{k=1}^2 b_{3k} b_k t_k \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \alpha^2 t_k^2} \right] K_1(\alpha t_j, r) d\alpha,
\end{aligned} \quad (43)$$

здесь $P_j^{**} = [(a_{12})/(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})] - [(P_j)/(a_{32})]$

Разрешимость полученных интегральных уравнений доказывается аналогично первому пункту. После определения $B_1(\beta)$, используя (41) и (8), определяются также все искомые функции. Потом, используя основные соотношения теории упругости [1], можно определить напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Крестенсен Р. Введение в механику композитов. М. Мир. 1982. 337 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука. 1971. 1100с. М.
3. Баблюян А. А. - ПММ. 1964. Т. 28. вып. 6.
4. Sneddon I. N. - Proc. Glasqou Math Ass. 1960. V. 4. P. 108-110.

5. *Тоноян В. С.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21. N. 3. С. 3-18.
6. *Tranter G. I.* - Proc. Glasqou Math Ass. 1960. V. 4. Pt.. 4. P. 200-212.
7. *Валов Г. М.* - Изв. АН СССР. МТТ. 1972. N 5.
8. *Баблоян А. А., Мхитарян С. М.* -Изв. АН АрмССР. Механика. 1969. Т. 22. N 6.
9. *Тоноян В. С.* - ДАН АрмССР. 1963. Т. 37. N5. С. 249-258.
10. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* -ДАН АрмССР. 1970. Т. 51. N 3. С. 144-149.
11. *Тоноян В. С.* - ДАН АрмССР. 1963. Т. 37. N 3. С. 121-130.

Վ. Ս. Տոնոյան, Ս. Ա. Մելքումյան

**Համառանցք վերջավոր և կիսաանվերջ ուղղաձիգ ճեղքերով օրթոտրոպ
կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը**

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիր օրթոտրոպ կիսահարթության համար, երբ այն թուլացված է համառանցք եզր դուրս եկող և ներքին կիսաանվերջ ուղղաձիգ ճեղքերով: Եզրագծի վերջավոր տիրույթում ազդում է կամայական ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմը: Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է: Դիտարկվում է հարթ դեֆորմացիայի խնդիր, որի լուծումը ներկայացված է ճեղքերի առանցքի նկատմամբ համաչափ և շեղ համաչափ խնդիրների լուծումների վերադրման միջոցով: Ամեն մի խնդիրը լուծվում է տեղափոխություններով, որոնք ներկայացված են Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով: Անհատ ֆունկցիաների որոշումը, երկու խնդրում էլ, բերված է գույգ և եռակի ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի լուծման: Այդ համակարգերի լուծումները, իրենց հերթին, բերված են Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծման: Ցույց են տրված այդ հավասարումների լուծելիությունները: