УДК 62.50

М. С. Габриелян, В. Р. Барсегян

Об оптимальном наблюдении линейной системы

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 12/IV 2002)

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, и ставится задача оптимального наблюдения при наличии потока информации. Предполагается, что в различные промежутки времени наблюдаются различные сигналы из этого потока. Строится оптимальный фильтр, восстанавливающий фазовый вектор в конечный момент времени наблюдения.

1. Пусть имеется система

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$, $A(t) - n \times n$ матрица с измеримыми и ограниченными элементами на промежутке $t \in [t_0, T]$. Предполагается, что наблюдается идеальный сигнал

$$y(\tau) = \begin{cases} y^{(1)}(\tau), \text{ при } \tau \in [\tau_1-\vartheta_1, \tau_1] \\ y^{(2)}(\tau), \text{ при } \tau \in [\tau_2-\vartheta_2, \tau_2] \\ \text{-----------------------------} \\ y^{(k)}(\tau), \text{ при } \tau \in [\tau_k-\vartheta_k, \tau_k], \end{cases} \tag{1.2}$$

где $t_0 \le \tau_1-\vartheta_1$, $\tau_i \le \tau_{i+1}-\vartheta_{i+1}$, $\vartheta_i > 0$, $(i = 1,\ldots, k-1)$, $\tau_k < T$.

Предполагается также, что

$$y^{(i)}(\tau) = G_i(\tau)\, x(\tau), \quad \tau \in [\tau_i-\vartheta_i,\tau_i], \tag{1.3}$$

где сигнал $y^{(i)}(\tau)-(m_i\times 1)$ - мерный, а $G_i(\tau)-(m_i\times n)$ - мерная матрица, элементы которой непрерывные функции при $\tau \in [\tau_i-\vartheta_i,\tau_i]$.

Если сигналы $y^{(i)}(\tau)$ (1.3) продолжить нулями при $\tau \,\overline{\in}\, [\tau_i - \vartheta_i,\tau_i]$, то (1.2) можно записать в следующем глобальном виде:

$$y(\tau) = G(\tau)x(\tau).$$

2. Сформулируем следующую задачу наблюдения [1, 2].

Требуется определить линейные операции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varphi_j[\tau_1,...,\tau_k;y(\tau)] = x_j(\tau_k) \quad (j = 1,...,n)$$

или в векторном виде

$$\varphi[\tau_1,...,\tau_k;y(\tau)] = x(\tau_k).$$

Целесообразно указанную линейную операцию искать в виде

$$\int_{\tau_1-\upsilon_1}^{\tau_k} V(\tau_1,...,\tau_k;\tau)y(\tau)d\tau = x(\tau_k). \tag{2.1}$$

Здесь матрица

$$V(\tau_1,...,\tau_k;\tau) = (V^{(1)}(\tau_1,\tau),...,V^{(k)}(\tau_k,\tau)) \tag{2.2}$$

имеет размерность $(n\times \sum_{i=1}^{k} m_i)$.

Используя формулу Коши для решения системы (1.1), получим

$$x(\tau) = X[\tau,\tau_i],x(\tau_i) \quad (i = 1,...,k), \tag{2.3}$$

где $X[\tau,\tau_i]$ - нормированная фундаментальная матрица системы (1.1). Подставляя значение $x(\tau)$ из (2.3) в (1.3) и учитывая (1.2), из (2.2) получим

$$\int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_k} \sum_{i=1}^{k} V^{(i)}(\tau_i,\tau)G_i(\tau)X[\tau,\tau_k]x(\tau_k)d\tau = x(\tau_k). \tag{2.4}$$

Так как вектор $x(\tau_k)$ может принимать любое значение из R^n, то из (2.4) следует, что

$$\int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_k} \sum_{i=1}^{k} V^{(i)}(\tau_i,\tau)G_i(\tau)X[\tau,\tau_k]d\tau = E, \tag{2.5}$$

где E - единичная матрица.

В литературе [1-3] условия (2.5) называются интегральными условиями. Известно, что не всегда существует матрица $V(\cdot)$, удовлетворяющая условиям (2.5). Если предполагать, что функция $V(\cdot)$, удовлетворяющая условиям (2.5), существует (которая в общем случае не является единственной), то эту функцию можно определить при помощи проблемы моментов при минимизации соответствующего функционала.

а) При минимизации функционала

$$\int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_k} V^2(\tau_1,\ldots,\tau_k;\tau)d\tau = \int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{m_i} \sum_{p=1}^{n} (V_{ps}{}^{(i)}(\cdot,\tau))^2 d\tau \tag{2.6}$$

с условиями (2.5) определение оптимального фильтра можно привести к изопериметрической задаче [1].

б) При минимизации функционала

$$\sup_{\tau_1-\vartheta_1 \le \tau \le \tau_k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{m_i} \sum_{p=1}^{n} |V_{ps}{}^{(i)}(\cdot,\tau)|$$

с условиями (2.5) оптимальный фильтр можно определить при помощи проблемы моментов [1] и т.д.

Таким образом, когда минимизируемый функционал удовлетворяет условиям нормы, поставленная задача наблюдения решается при помощи проблемы моментов.

Замечание. Часто на каждом этапе наблюдения получаемый сигнал не является полным, но в совокупности при помощи полученной информации вида (1.2) полностью определяется состояние фазового вектора. Следует отметить, что во многих практических задачах эффективный процесс наблюдения происходит вышеуказанным образом.

3. Рассмотрим конкретный пример.

$$\dot{x} = \alpha_1 x_1, \qquad \dot{x} = \alpha_2 x_2.$$

Здесь $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$

Пусть поступающий сигнал имеет вид

$$y(\tau) = \begin{cases} y^{(1)}(\tau) = g_1 x_1(\tau), \text{ при } \tau \in [\tau_1-\vartheta_1, \tau_1]; \\ y^{(2)}(\tau) = g_2 x_2(\tau), \text{ при } \tau \in [\tau_2-\vartheta_2, \tau_2]; \ \tau_1 \le \tau_2-\vartheta_2, \end{cases}$$

где $g_1 = \text{const}$, $g_2 = \text{const}$.

Интегральные условия для этой задачи будут

$$\int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_1} V_{11}^{(1)} e^{\alpha_1(\tau-\tau_2)} d\tau = \frac{1}{g_1}; \qquad \int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_1} V_{21}^{(1)} e^{\alpha_1(\tau-\tau_2)} d\tau = 0 \tag{3.1}$$

$$\int_{\tau_2-\vartheta_2}^{\tau_2} V_{12}^{(2)} e^{\alpha_2(\tau-\tau_2)} d\tau = 0; \qquad \int_{\tau_2-\vartheta_2}^{\tau_2} V_{22}^{(2)} e^{\alpha_2(\tau-\tau_2)} d\tau = \frac{1}{g_2}$$

Пусть минимизируется функционал:

$$\int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_1} [(V_{11}^{(1)}(\cdot,\tau))^2 + (V_{21}^{(1)}(\cdot,\tau))^2] d\tau + \int_{\tau_2-\vartheta_2}^{\tau_2} [(V_{12}^{(2)}(\cdot,\tau))^2 + (V_{22}^{(2)}(\cdot,\tau))^2] d\tau \qquad (3.2)$$

Если рассматривать задачу (3.1), (3.2) как изопериметрическую, то ее решением будет

$$V_{11}^{(1)\,0}(\cdot;\tau) = \frac{2\alpha_1 e^{\alpha_1(\tau-\tau_2)}}{g_1\left(e^{2\alpha_1(\tau_1-\tau_2)} - e^{2\alpha_1(\tau_1-\vartheta_1-\vartheta_2)}\right)}; \qquad V_{21}^{(1)\,0}(\cdot;\tau) = 0$$

$$V_{12}^{(2)\,0}(\cdot;\tau) = 0 \qquad V_{22}^{(2)\,0}(\cdot;\tau) = \frac{2\alpha_2 e^{\alpha_2(\tau-\tau_2)}}{g_2\left(1 - e^{-2\alpha_2\vartheta_2}\right)}.$$

Таким образом, оптимальный фильтр в данном случае будет иметь следующий вид:

$$x(\tau_2) = \int_{\tau_1-\vartheta_1}^{\tau_1} \begin{pmatrix} g_1 V_{11}^{(1)\,0}(\cdot;\tau) x_1(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau + \int_{\tau_2-\vartheta_2}^{\tau_2} \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 V_{22}^{(2)\,0}(\cdot;\tau) x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Следует отметить, что на каждом отдельном этапе наблюдения указанная система не вполне наблюдаема.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. Наука. 1968. 476с.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. Наука. 1977. 392 с.
3. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М. Гостехиздат. 1950. 359 с.

Մ. Ս. Գաբրիելյան, Վ. Ռ. Բարսեղյան

Գծային համակարգի օպտիմալ դիտման մասին

Դիտարկվում է գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի օպտիմալ դիտման խնդիրը ինֆորմացիոն հոսքի առկայության դեպքում: Ենթադրվում է, որ ժամանակի տարբեր միջակայքերում այդ հոսքից ստացվում են տարբեր ազդակներ: Կառուցված է դիտման ժամանակի վերջին պահին համակարգի ֆազային դիրքը վերականգնող օպտիմալ ֆիլտր: