УДК 510.64

А. А. Чубарян, О.Р. Болибекян

О секвенциальных системах слабых арифметик

(Представленно чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 26/V 2002)

Известно, что при автоматическом поиске доказательства теорем предпочтительнее работать с секвенциальными системами. В настоящее время существует множество таких систем. Однако авторам настоящей работы не удалось найти в имеющейся литературе секвенциального аналога минимального исчисления. В данной статье определяется секвенциальный аналог исчисления минимальной арифметики Робинсона гильбертовского типа. Учитывая то обстоятельство, что доказательства без сечений обладают более простой стратегией поиска выводов, в работе также определяется исчисление минимальной арифметики Робинсона без правила сечения.

Далее мы будем придерживаться общепринятых определений переменной, терма, формулы, секвенции и подстановки, введенных в [1].

Приведем список схем аксиом, собственных аксиом и правил вывода исчисления минимальной арифметики Робинсона гильбертовского типа R_M. В 1-9, 25 A, B, C - формулы, в 10, 11, 26, 27 x - переменная, A(x) - формула, C(x) - формула, не содержащая свободно x, t - терм, свободный для x в A(x), в 12-24 a, b и c - предметные переменные, а 0 - индивидуальная константа.

Схемы аксиом:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3. $A \supset (B \supset A \& B)$
4. $A \& B \supset A$
5. $A \& B \supset B$
6. $A \supset A \vee B$
7. $B \supset A \vee B$
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
10. $\forall x A(x) \supset A(t)$
11. $A(t) \supset \exists x A(x)$

Собственные аксиомы:

12. $a = a$
13. $a = b \supset b = a$
14. $a = b \supset (b = c \supset a = c)$

15. $a = b \supset a' = b'$
16. $a = b \supset (a + c = b + c \;\&\; c + a = c + b)$
17. $a = b \supset (a \cdot c = b \cdot c \;\&\; c \cdot a = c \cdot b)$
18. $a' = b' \supset a = b$
19. $a' = 0 \supset 0' = 0$
20. $a = 0 \vee \exists b\, (b' = a)$
21. $a + 0 = a$
22. $a + b' = (a + b)'$
23. $a \cdot 0 = 0$
24. $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Правила вывода:

25. $[(A, A \supset B)/B]$
26. $[(C \supset A(x))/(C \supset \forall x A(x))]$
27. $[(A(x) \supset C)/(\exists x A(x) \supset C)]$

Перейдем теперь к определению системы минимальной арифметики Робинсона генценовского типа SR_M. В рамках этой системы предполагается, что A, B, C и D - произвольные формулы; Γ и Δ - конечные (возможно, пустые) последовательности формул, θ - пустая последовательность формул или последовательность, состоящая из одной формулы; a, b, c и x - переменные; 0 - индивидуальная константа; A(x) - формула; t - терм, свободный для x в A(x), d - переменная, свободная для x в A(x).

Аксиоматика системы SR_M состоит из схемы аксиом вида $C \rightarrow C$, где C - произвольная формула, и арифметических аксиом вида $\rightarrow \wp$, где $\wp$ - одна из собственных аксиом системы R_M. Приведем также правила вывода исчисления SR_M.

Логические правила вывода:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \qquad \frac{\Delta \rightarrow A \quad \text{и} \quad B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \supset B, \Delta, \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \text{и} \quad \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \,\&\, B} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \theta} \quad \frac{B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \theta \quad \text{и} \quad B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A} \qquad \frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}$$

$$\frac{\Gamma \to A(d)}{\Gamma \to \forall x A(x)}\,^{*} \qquad \frac{A(t), \Gamma \to \theta}{\forall x A(x), \Gamma \to \theta}$$

$$\frac{\Gamma \to A(t)}{\Gamma \to \exists x A(x)} \qquad \frac{A(d), \Gamma \to \theta}{\exists x A(x), \Gamma \to \theta}\,^{*}$$

* Переменная d постулата не входит свободно в его заключение. (Если A(x) не содержит x свободно, то A(d) есть A(x), какова бы ни была переменная d; в таких случаях мы условимся выбирать для анализа в качестве d переменную, не входящую свободно в заключение, так что ограничение будет соблюдаться.)

Структурные правила вывода:

Утончение $[(\Gamma \to \theta)/(C, \Gamma \to \theta)]$

Сокращение $[(C, C, \Gamma \to \theta)/(C, \Gamma \to \theta)]$

Перестановка $[(\Delta, D, C, \Gamma \to \theta)/(\Delta, C, D, \Gamma \to \theta)]$

Сечение $[(\Delta \to C$ и $C, \Gamma \to \theta)/(\Delta, \Gamma \to \theta)]$

Следуя [1], правила, стоящие в левом столбце, будем называть сукцедентными правилами и обозначать их через "$\to \supset$", "$\to \&$", "$\to \vee$", "$\to \neg$", "$\to \forall$", "$\to \exists$" соответственно. Правила, стоящие в правом столбце, будем называть антецедентными правилами и обозначать через "$\supset \to$", "$\& \to$" и т.д. Отметим, что в исчислении SR_M нет "$\to$ У", "$\to$ С", "$\to$ П" правил, а в правиле "$\neg \to$" сукцедент заключения пуст.

Теорема 1. *Если формула* F *выводима в* R_M *и все переменные остаются фиксированными, то секвенция* $\to$ F *выводима в* SR_M. *Если секвенция* $\to$ F *выводима в* SR_M, *то формула* F *выводима в* R_M *и все переменные являются фиксированными.*

Доказательство первой части теоремы аналогично доказательству теоремы 46 ([1], §77), т.е. доказывается, что каждая аксиома исчисления R_M выводима в SR_M, а каждое правило вывода R_M моделируется в SR_M. В случае аксиом выводимость очевидна. Перейдем к рассмотрению правил вывода R_M. Для правила вывода вида [R/Q] , где R и Q - формулы, нужно доказать, что из выводимости секвенции $\to$ R в исчислении SR_M следует выводимость секвенции $\to$ Q в этом исчислении. В случае правила вывода вида [R и S/Q] нужно показать, что в SR_M из выводимости секвенций $\to R$ и $\to S$ следует выводимость секвенции $\to Q$ (R, S, и Q - формулы). При этом нетрудно убедиться, что ни в одном из подслучаев нет необходимости применения сукцедентных структурных правил.

Доказательство второй части теоремы аналогично доказательству теоремы 47 ([1], §77). Чтобы доказать, что каждая секвенция, выводимая в SR_M, выводима также и в R_M, введем понятие формульного образа секвенции $\Gamma\to\theta$ следующим образом. Пусть Γ - последовательность формул $A_1,A_2,\ldots,A_n$ $(n \geq 1)$, а θ - формула B или пусто. Формульным образом секвенции $\Gamma\to\theta$ назовем формулу $\tilde{\Gamma}\supset\theta^*$, где $\tilde{\Gamma} = A_1\&(A_2\&\ldots\&(A_{n-1}\& A_n))\ldots)$ и

$$\theta^* = \begin{cases} B, \text{ если } \theta \text{ есть } B \\ \neg(G\supset G), \text{ если } \theta \text{ пусто} \end{cases}$$

(G) - некоторая фиксированная замкнутая формула). В случае n = 0 формульным образом секвенции $\to\theta$ является формула θ^*, где

$$\theta^* = \begin{cases} B, \text{ если } \theta \text{ есть } B \\ \neg(G\supset G), \text{ если } \theta \text{ пусто} \end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть следующие четыре случая:

1. Формульным образом секвенции вида $C\to C$ является формула $C \supset C$. В системе R_M выводимость последней очевидна.
2. Рассматриваемая секвенция - одна из арифметических аксиом системы SR_M. В этом случае формульным образом соответсвующей секвенции будет одна из собственных аксиом R_M.
3. Для правила вывода вида $[(\Gamma_1\to\theta_1)/(\Gamma\to\theta)]$ нетрудно убедиться, что формула $(\tilde{\Gamma}_1)\supset\theta_1^*)\supset(\tilde{\Gamma}\supset\theta^*)$ выводима в R_M.
4. В случае правила вывода вида $[(\Gamma_1\to\theta_1$ и $\Gamma_2\to\theta_2)/(\Gamma\to\theta)]$ легко доказать, что формула $(\tilde{\Gamma}_1\supset\theta_1^*)\supset((\tilde{\Gamma}_2\supset\theta_2^*)\supset(\tilde{\Gamma}\supset\theta^*))$ выводима в R_M.

Замечание. Структурное правило "$\to$ У" необходимо при выводе интуиционистской аксиомы вида $\neg A \supset (A \supset B)$. Однако она не является аксиомой ни одной из систем, рассмотренных в данной статье.

Перейдем к определению секвенциального исчисления SR^-_M без правила сечения. Определим это исчисление как интуиционистское исчисление G3 (см. [1], §80) с добавлением арифметических аксиом исчисления SR^-_M со следующим ограничением: в правиле "$\neg\to$" θ должно быть пусто.

Теорема 2. *Если формула* F *выводима в* R_M *и все переменные остаются фиксированными, то секвенция* $\Sigma \to F$ *выводима в* SR^{-}_{M}. *Если секвенция* $\Sigma \to F$ *выводима в* SR^{-}_{M}, *то формула* F *выводима в* R_M *и все переменные являются фиксированными. (В обеих частях теоремы* Σ *- список замкнутых формул, составленных из собственных аксиом исчисления* R_M*).*

Доказательство теоремы основано на эквивалентности R_M и SR_M, а также на устранении сечений (смешений) в исчислении SR_M (аналогично теореме 48 в [1], §78). Заметим, что устранение смешений проводится рассмотрением случаев, указанных в теореме 48 ([1]), учитывая, что

1. в случае 1а сукцедентные структурные правила не рассматриваются;
2. случай 2а выпадает из рассмотрения;
3. в остальных случаях при понижении степени смешения нет необходимости применения сукцедентных структурных правил (в случае 6 сукцедент пуст).

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Клини С. К.* Введение в метаматематику, М. ИЛ. 1957.

Ա. Ա. Չուբարյան, Հ. Ռ. Բոլիբեկյան

Թույլ թվաբանությունների սեկվենցիալ հաշիվների մասին

Հոդվածում սահմանվում են Ռոբինսոնի թվաբանության մինիմալ հաշիվների սեկվենցիալ համակարգեր՝ հատույթի կանոնով և առանց հատույթի կանոնի: Ապացուցված է նրանց համարժեքությունը: