

С. Л. Берберян

Об угловых граничных значениях нормальных гармонических и субгармонических функций

(Представлено академиком В. С. Захаряном 10/II 2002)

В настоящей статье изучаются угловые граничные значения в произвольной точке единичной окружности нормальных гармонических и субгармонических функций, определенных в единичном круге. Будем придерживаться общепринятых обозначений. Через D обозначим единичный круг $|z| < 1$, через Γ - единичную окружность $|z| = 1$. Для произвольной точки ξ окружности Γ обозначим $h(\xi, \varphi)$ хорду круга D , оканчивающуюся в точке ξ и образующую с радиусом в точке ξ угол раствора φ , $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Подобласть круга D , расположенную между хордами $h(\xi, \varphi_1)$ и $h(\xi, \varphi_2)$, где $-\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$, обозначим через $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$. Символом $\Delta(\xi)$ будем обозначать произвольный угол в D с вершиной в точке $\xi \in \Gamma$. В дальнейшем будем рассматривать действительные функции $u(z): D \rightarrow \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. Пусть $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Для произвольного подмножества S круга D , для которого точка $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(u, \xi, S)$ предельное множество функций u в точке ξ относительно множества S . Граничную точку $\xi = e^{i\theta}$ называют точкой Фату для функций $u(z)$, если существует такое действительное значение $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, что $C(u, \Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)) = \alpha$, для всех углов $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$. В этом случае говорят, что функция $u(z)$ имеет в точке ξ угловой предел, равный α . Известно, что (см. [1]) субгармоническую (гармоническую) функцию $u(z)$ называют нормальной функцией, если на группе G всех конформных автоморфизмов круга D порождаемое ею семейство $u(S(z))$, где $S(z) \in G$, нормально в D в смысле Монтеля, т.е. любая последовательность $u(S_n(z))$, где $S_n(z) \in G$, содержит подпоследовательность, которая на компактах круга D либо равномерно сходится к субгармонической (гармонической) функции, либо равномерно расходится к $-\infty$ или $+\infty$. Интерпретируя круг D как модель в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z, \omega)$ неевклидово расстояние между точками z и ω из D , где $\sigma(z, \omega) = 1/2 \ln((1 + u)/(1 - u))$, $u = |(z - \omega)/(1 - \bar{z}\omega)|$, а через $D(z, r)$ - неевклидов круг с центром в точке z и неевклидовым радиусом r . Исследованию угловых граничных значений мероморфных, аналитических, гармонических, субгармонических функций, определенных в единичном круге, посвящены многие работы (см. например, [2-8]).

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Для того, чтобы нормальная гармоническая в D функция $u(z)$ имела в точке ξ угловой предел α , необходимо и достаточно, чтобы существовали две такие хорды $h(\xi, \varphi_1)$, $h(\xi, \varphi_2)$, для которых*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in h(\xi, \varphi_1)}} u(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in h(\xi, \varphi_2)}} u(z) = \alpha$$

Наличие углового предела при более жестком предположении, что существует $\lim_{z \rightarrow \xi, z \in H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)} u(z) = \alpha$, где $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ - область, ограниченная двумя гиперциклами, оканчивающимися в точке ξ и образующими с радиусом в этой точке углы φ_1, φ_2 , доказано Миком [9].

Теорема 2. Для того, чтобы нормальная гармоническая в D функция $u(z)$ имела в точке ξ предел α , необходимо и достаточно, чтобы предельное множество $C(u, \xi, H(\xi, \varphi_1, \varphi_2))$ было ограничено сверху (или снизу) числом α и существовала такая кривая L , с концом в точке ξ , целиком лежащая в некоторой области $H(\xi, \varphi_1', \varphi_2')$, ограниченной двумя гиперциклами, содержащимися $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, что

$$\lim_{z \in L, z \rightarrow \xi} u(z) = \alpha.$$

Наличие углового предела у нормальных гармонических функций $u(z)$ при более жестком предположении, что функция $u(z)$ в круге D не принимает значения α и $\lim u(z) = \alpha$, где L - некоторая, не касательная к Γ в точке ξ кривая, а $z \rightarrow \xi, z \in L$, доказано Лаппаном [10].

То, что условия теоремы 2 существенны, показывает пример функции $u(z) = \arg(1 - z)$.

Теорема 3. Для того, чтобы нормальная субгармоническая в D функция $u(z)$ имела в точке ξ угловой предел α , необходимо и достаточно, чтобы предельные множества $C(u, \xi, h(\xi, \varphi))$ для множества значений φ , всюду плотных в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, были ограничены сверху числом α и

$$\lim_{z \in L, z \rightarrow \xi} u(z) = \alpha,$$

где L - некоторая, не касательная к окружности Γ кривая в точке ξ .

Отметим, что существование углового предела при более жестком условии, что $u(z)$ ограничена сверху числом α в некоторой окрестности точки ξ , доказано Миком [9].

Российско-армянский (славянский) университет

Литература

1. Rung D. - Math. Zeitschr. 1964. Bd. 84. N1.
2. Джрбашян М. М., Захарян В. С. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Физматгиз. 1993.
3. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М. Мир. 1971.
4. Носиро К. Предельные множества. М. ИЛ. 1963.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М. ГИТТЛ. 1950.
6. Захарян В. С.- Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 27. N4.
7. Берберян С. Л., Гаврилов В. И.- Mathematica Montisnigri. 1993. V. 1.
8. Берберян С. Л.- Изв. вузов. Сер. матем. 1986. N3.
9. Meek J.- Mathematica Japonica. 1977. V. 22. N3.
10. Lappan P.- Math. Zeitschr. 1966. Bd. 94. N2.

Ս. Լ. Բերբերյան

**Նորմալ հարմոնիկ և սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների
անկյունային եզրային արժեքների մասին**

Հոդվածում ստացված են որոշ դասերի ֆունկցիաների անկյունային եզրային արժեքների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ միավոր շրջանագծի կամայական կետում: Այդ դասերի ֆունկցիաների անկյունային եզրային արժեքների գոյության թեորեմներ ավելի խիստ սահմանափակումների դեպքում ստացված են ամերիկացի մաթեմատիկոսներ Լապլանի և Միլի կողմից: