УДК 517

В.И.Гаврилов, академик В.С.Захарян, А.В. Субботин

Линейно-топологические свойства максимальных пространств Харди гармонических функций в круге

(Представленно 31/X 2001)

Эффективный способ изучения малых классов Харди h^p, $p > 0$, гармонических функций в единичном круге комплексной плоскости (представленный в широко известных монографиях [1-4]) состоит в давнишнем, принадлежащем М. Риссу (1927 г.), наблюдении, что гармонические функции классов h^p, $p > 1$, являются дяйствительными частями аналитических финкций больших классов Харди H^p, $p > 1$, и это позволяет воспользоваться глубокими результатами и широко разработанными методами теории классов H^p аналитических функций (см. [1-4]). Хорошо известно также, что это свойство перестает быть справедливым в случае $0 < p \le 1$ и типичным примером служит так называемое ядро Пуассона - принадлежащая малому классу h^1 функция

$$p(z)=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}. \quad |z| < 1, \tag{1}$$

которая является действительной частью функции $(1 + z)(1 - z)^{-1}$, не пренадлежащей классу H^1. Более того, гармонические функции малых классов h^p, $0 < p < 1$, могут иметь во многих смыслах очень плохое поведение; например, не обладать радиальными пределами почти во всех граничных точках, что невозможно для аналитических функций больших классов Харди H^p, $0 < p < 1$. Поэтому уже давно (см., например, пионерскую в этом направлении работу [5]) стали изучать подмножества в h^p, $p > 0$, элементы которых представляют собой действительные части функций пространства H^p, $p > 0$. В настоящей статье указывается новый подход к изучению таких подмножеств в h^p, $p > 0$, позволяющий рассматривать их как F-пространства относительно естественных инвариантных метрик и изучать в них различных линийно-топологические свойства. Аналогичный подход использован в статье [6] при изучении пространств аналитических функций.

1. Основные обозначения и определения. Символом U обозначим открытый единичный круг $|z| < 1$ на комплексной плоскости C, а символом T - его границу $|z| = 1$. Для произвольной тички $e^{i\theta} \in T$ и произвольного числа $\alpha > 1$ рассмотрим в U угловую область $D_\alpha(\theta) = \{z \in U; |z - e^{i\theta}| < \alpha (1 - |z|)\}$ с вершиной в $e^{i\theta}$. Для произвольной комплексной функции $u(z)$, определенной в U, величины

$$\sup_{0 \le r < 1} |u(re^{i\theta})| = (Mu)(e^{i\theta}) \quad \text{и} \quad \sup_{z \in D_\alpha(\theta)} |u(z)| = (M_\alpha u)(e^{i\theta})$$

называют, соответственно, радиальной максимальной функцией и угловой максимальной функцией в точке $e^{i\theta} \in T$.

Если функция $u(z)$ непрерывна в круге U, то для произвольных чисел $p > 0$ и $\alpha > 1$ обозначим

$$\|u\|_p = \sup_{0 \le r < 1} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{1/p}, \tag{2}$$

$$\|u\|_p^* = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (Mu)^p(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{1/p}, \tag{3}$$

$$\|u\|_{p,\alpha} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (M_\alpha u)^p(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{1/p}, \tag{4}$$

Из определения (2)-(4) непосредственно следует, что

$$\|u\|_p \le \|u\|_p^* \le \|u\|_{p,\alpha} \tag{5}$$

для всех $p > 0$ и $\alpha > 1$, и неравенства считаются формальным в случае бесконечности какой-либо из величин (2)-(4). С другой стороны, классическая максимальная теорема Харди-Литтквуда [7] утверждает, что для аналитической функции f в круге U условие $\|f\|_p < +\infty$ для всех $p > 0$ равносильно свойству $\|f\|_p^* < +\infty$. Если функция $u(z)$ гармоническая в U, то, согласно основной теореме статьи [8], для любых $p > 0$ и $\alpha > 1$ можно указать такую универсальную положительную постоянную $A_{p,\alpha}$, что

$$\|u\|_{p,\alpha} \le A_{p,\alpha} \|u\|_p^*, \tag{6}$$

и неравенство считается формальным, если правая часть бесконечна.

Гармоническую в круге U функцию $u(z)$ относят к малому классу Харди h^p, $p > 0$, если $\|u\|_p < +\infty$. Аналитическую в круге U функцию $f(z)$ относят к большому классу Харди H^p, $p > 0$, если $\|f\|_p < +\infty$, а последнее равносильно тому, что $u,v \in h^p$, $p > 0$, где $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in U$, (см. [1, §1.1])

Определение 1. *Гармоническую функцию* $u(z)$, *определенную в круге* U, *отнесем к классу*

$h^p{}_{max}$, $p > 0$, *если* $\|u\|_p^* < +\infty$, *так что вложение* $h^p{}_{max} \subseteq h^p$ *справедливо для всех* $p > 0$.

Нетрудно доказать также, исходя из определения (3), строгие вложения $h^{p_1}_{max} \subset h^{p_2}_{max}$ для всех $0 < p_2 < p_1$.

Замечание 1. Отмеченная выше максимальная теорема Харди-Литтлвуда показывает, что необходимость введения максимального аналога H^p_{max}, $p > 0$, для класса h^p, $p > 0$, отпадает, поскольку $H^p_{max} = H^p$, $p > 0$.

Теорема 1. *Функция* $u(z)$ *принадлежит классу* $h^p{}_{max}$, $p > 0$, *в том и только в том случае, когда она представима в виде* $u(z) = \mathrm{Re}\ f(z)$ *для некоторой функции* $f(z)$ *класса* H^p, $p > 0$. *При этом, если функция* f *в этом представлении нормированна условием* $\mathrm{Im}\ f(0) = 0$, *то*

$$\|f\|_p \le C_p \|u\|_p^* \tag{7}$$

с некоторой постоянной $C_p > 0$, *не зависящей от* u

Замечание 2. В частном случае $p = 1$ этот результат сформулирован и доказан в [2] (гл. VIII, §D, п.2). Похожий результат для функции, определенных в полуплоскости, отмечен в [9] (§, теорема 9 и следствие 2).

Доказательство. Согласно определения 1, функция (3), (4) и неравенства (5) и (6), функция $u(z) \in h^p_{max}$, $p > 0$ тогда и только тогда, когда $\|u\|_{p,\alpha} < +\infty$ для $p > 0$ и всех $\alpha > 0$. Для гармонической функции $u(z)$ в круге U существует единсвенная с точностью до аддитивной постоянной сопряженная гармоническая функция $v(z)$, такая что функция $u(z) + iv(z) = f(z)$ голоморфна в U. Если функцию $v(z)$ нормировать условием $v(0) = 0$, то в силу основного результата статьи [5] получим неравенство

$$\|f\|_p \le C_{p,\alpha} \|u\|_{p,\alpha}, \tag{8}$$

справедливое для всех $p > 0$ и $\alpha > 1$ с некоторой постоянной $C_{p,\alpha} > 0$, не зависящей от $u(z)$ и $v(z)$. Поэтому, с учетом изложенного в начале доказательства утверждения, заключаем, что $\|f\|_p < +\infty$ и $u(z) = \mathrm{Re}\ f(z)$, $z \in U$, для функции $f \in H^p$, $p > 0$. Неравенство (7) следует из неравенства (8) подстановкой в него неравенства (6).

Следствие 1. *Для любого* $p > 0$ *существует конечная постоянная* $C_p > 0$ *такая, что*

$$|u(z)| \le C_p \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^{1/p} \|u\|_p^*, \quad z \in U, \tag{9}$$

для любой функции $u(z) \in h^p_{max}$, $p > 0$.

Доказательство. По теореме1 для любой функции $u(z) \in h^p_{max}$, $p > 0$, найдем голоморфную функцию $f \in H^p$, $p > 0$, удовлитворяющую оценке (7) с постоянной $C_p > 0$, не зависящей от $u(z)$ такую, что $u = \mathrm{Re}\, f$. Известная оценка модуля функции класса H^p (см., например, [4] гл. II, §3, п. 1) имеет вид

$$|f(z)| \le \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^{1/p} \|f\|_p, \quad z \in U, \tag{10}$$

с учетом неравенства $|u(z)| \le |f(z)|$ и оценки (7), получаем (9).

Другое следствие теоремы 1 связана с понятием углового предела функции $u(z)$ в граничной точке $e^{i\theta}$. Так называют значение $\omega \in \overline{\mathbb{C}}$, которое является пределом функции $u(z)$, когда z стремится к $e^{i\theta}$, оставаясь в каждой области $D_\alpha(\theta)$, $\alpha > 1$, одним и тем же для всех $D_\alpha(\theta)$, $\alpha > 1$, и которое обозначается $\omega = u(e^{i\theta})$.

Следствие 2. *Произвольная функция* $u(z)$ *класса* $h^p{}_{max}$, *обладает конечным угловым пределом* $u(e^{i\theta})$ *для почти всех точек* $e^{i\theta} \in T$.

Доказательство. Согласно теореме 1, любая функция $u \in h^p{}_{max}$, $p > 0$, имеет представление $u = \mathrm{Re}\, f$, $f \in H^p$, $p > 0$. Так как функция классов H^p, $p > 0$, обладают конечными угловыми пределами почти всюду на T (см., например, [4]), то утверждение следствия 2 справедливо на основании непрерывности операции взятия действительной части комплексного числа.

Замечание 3. Выше отмечалось, что функция классов h^p, $p > 0$, являются действительными частями функции классов H^p, $p > 0$, так что утверждение теоремы 1 и следствий 1 и 2 доставляют новую информацию только в случае $0 < p \le 1$.

2. Соотношения между классами h^p **и** $h^p{}_{max}$, $p > 0$. Согласно упомянутой в начале статьи теореме М. Рисса, при любом $p > 1$ условия $\|u\|_p < +\infty$ и $\|v\|_p < +\infty$ для любой пары сопряженных гармонических в U функций $u(z)$ и $v(z)$ равносильны. Так как при этом функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ принадлежит классу H^p, $p > 1$, то по максимальной теореме Харди-Литтлвуда [7] имеем $\|u\|_p^* < +\infty$. Таким образом, при $p > 1$ классы h^p и $h^p{}_{max}$ совпадают (как множества функций). Это утверждение становится неверным уже при $p = 1$, как показывает пример функции (1). Справедлива, однако, следующая

Теорема 2. *Любая функция* $u(z)$ *класса* h^1, *а также ее сопряженная функция* $v(z)$, *принадлежит* *каждому из классов* h^p_{max}, $0 < p < 1$. *Если, дополнительно, функция* $v(z)$ *нормирована условием* $v(0) = 0$, *то неравенства*

$$\|u\|_p^* \le K_p\|u\|_1, \quad \|v\|_p^* \le K_p\|u\|_1 \tag{11}$$

справедливы с некоторой конечной постоянной K_p, *зависящей только от* p, $0 < p < 1$.

Доказательство. Известная теорема Колмогорова (см., например, [2], гл.V, §D, п.5) утверждает, что для любой гармонической функции $u(z)$, представимой в круге U интервалом Пуассона-Лебега, голоморфная функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ принадлежит классам H^p для любого p, $0 < p < 1$, где $v(z)$ - сопряженная к $u(z)$ функция с $v(0) = 0$; при этом $\|f\|_p \le L_p\|u\|_1$ с конечной постоянной $L_p > 0$, зависящей только от p. В статье [10], (с. 29) отмечено, что утверждение теоремы Колмогорова остается справедливым для произвольной функции u класса h^1, поскольку в ее доказательстве интеграл Пуассона-Лебега можно заменить интегралом Пуассона-Стилтьеса. Согласно максимальной теореме Харди-Литтлвуда, имеет оценку $\|f\|_p^* \le D_p\|f\|_p$ с постоянной $D_p > 0$, зависящей толско от p. Объединяя обе оценки и учитывая неравенства $|u(z)| \le |f(z)|$, $|v(z)| \le |f(z)|$, $z \in U$, получаем (11) с $K_p = L_p \cdot D_p$.

В заключении отметим, что в [11] рассматривались некоторые классы $\tilde{h}^p$, $0 < p \le 1$, промежуточныв между h^p_{max} и h^p.

3. Топологические свойства классов h^p_{max}, $p > 0$. Стандартной техникой проверяется, что вводимая формулой (3) числовая характеристика $\|u\|_p^*$ определяет в классах h^p_{max}, $p > 0$, инвариантную метрику

$$\rho_p^*(u_1,u_2) = (\|u_1 - u_2\|_p^*)^{\alpha_p}, \quad u_1,u_2 \in h^p_{max}, \ p > 0, \quad \alpha_p = \min(1, p),$$

превращающую каждый класс h^p_{max}, $p > 0$ в метрическое пространство (удовлетворение функции ρ_p^* аксиомам метрики непосредственно следует из неравенства треугольника в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$, $p > 0$).

Отметим, что метрику в классах h^p_{max} можно ввести также посредством угловой числовой характеристики (4) ввиде

$$\rho_{p,\alpha}(u_1,u_2) = \|u_1 - u_2\|_{p,\alpha}^{\alpha_p}, \quad u_1,u_2 \in h^p_{max}, \ p > 0. \quad \alpha_p = \min(1, p).$$

Однако, в силу неравенства (6), метрики ρ_p и $P_{p,\alpha}$ для любого $\alpha > 1$ эквивалентны по Липшицу, а значит, они топологически эквивалентны и задают одинаковые равномерные и липшицевы структуры.

Так как, по определению, гармоничекая функция $u(z)$, $z \in U$, принадлежит классу $h^p{}_{max}$, $p > 0$, тогда и только тогда, когда $\|u\|_p^* = \rho_p^*(u,0) < +\infty$, то из неравенства треугольника для метрики ρ_p^* и свойства абсолютной однородности характеристики $\|\cdot\|_p^*$ следует, что метрические пространства $h^p{}_{max}$, $p > 0$, замкнуты относительно операций поточечного сложения функций и умножения функций на действительное число. Таким образом, классы $h^p{}_{max}$, $p > 0$, образуют линейно-метрическое пространства над полем действительных чисел, т.е. такие линейные и одновременно метрические пространства, в которых линейные опреции непрерывны относительно метрик.

Рассматривая классы H^p, $p > 0$, как метричекие пространства с естественными метриками $\rho_p(f,g) = \|f - g\|_p^{\alpha_p}$, $f,g \in H_p$, $\alpha_p = \min(1,p)$, докажем следующий результат.

Теорема 3. *Для люого* $p > 0$ *пространства* $h^p{}_{max}$ *изоморфно некоторому замкнутому линейному подпространству пространства Харди* H^p, $p > 0$, *и следовательно, представляет собой* F-*пространство (*B-*пространство при* $p \geq 1$*) относительно метрики* ρ_p^* *(относительно нормы* $\|\cdot\|_p^*$ при $p \geq 1$), *и сходимость в метрике* ρ_p^* *сильнее равномерной сходимости на компактах круга* U,

Замечание 4. Как и замечание 3, отметим, что новую информацию теорема 3 доставляет только в случае $0 < p \leq 1$.

Доказательство. Согласно теореме 1, каждой функции $u \in h^p_{max}$, $p > 0$, можно поставить в соответствие однозначно определенную функцию $f \in H^p$, $p > 0$, с условием $\operatorname{Im} f(0) = 0$. Обозначим множество таких функций через $H_0{}^p$, заметим, что в силу оценки (7) для $\|f\|_p$ и $\|u\|_p^*$, это соответствие непрерывно. Так как, по максимальной теореме Харди-Литтлвуда, справедлива и обратная оценка $\|u\|_p^* \leq D_p\|f\|_p$, то пространство h^p_{max} в действительности изоморфно (в линейном и топологическом смыслах) подпространству $H_0{}^p$ пространства H^p, что доказывает первое утверждение теоремы 3. Учитывая, что пространство H^p, $p > 0$ (а, следовательно, и любое его замкнутое линейное подпространство) является F-пространством (B-пространством при $p \geq 1$) относительно метрики ρ_p (нормы $\|\cdot\|_p$ при $p \geq 1$), приходим ко второму утверждению теоремы 3. Утверждение о равномерной сходимости следует из определения метрики ρ_p^* и оценки (9) в следствии 1.

Приводимую ниже теорему можно считать аналогом для пространств h^p_{max}, $p > 0$, исвестной теоремы Ф. Рисса о граничной сходимости в среднем функции пространств H^p (см., например, [4], гл.II, §4, п.1).

Тоерема 4. *Для любой функции* $u \in h^p_{max}$, $p > 0$, *функции* u_r, $o \le r < 1$, *определяемые формулой* $u_r(z) = u(rz)$, $z \in U$, $0 \le r < 1$, *сходятся при* $r \to 1-$ *к исходной функции* u *в метрике* ρ_p^*.

Доказательство. Пусть $u \in h^p_{max}$, $p > 0$. Согласно теореме 1, существует такая аналитическая функция f класса H^p, $p > 0$, что $u = \mathrm{Re}\, f$. Так как для любой функции $f \in H^p$, $p > 0$, справедлива теорема Ф. Рисса (см. [4], гл.II, §4, п.1), то $\|f_r - f\|_p \to 0$ при $r \to 1-$, где f_r, $0 \le r < 1$, определены как $f_r(z) = f(rz)$, $z \in U$. Тогда для $u_r = \mathrm{Re}\, f_r$, $0 \le r < 1$, на основании максимальной теоремы Харди-Литтлвуда, имеем $\|u_r - u\|_p^* \le \|f_r - f\|_p^* \le D_p\|f_r - f\|_p \to 0$ при $r \to 1-$, т.е. функции u_r, $o \le r < 1$, сходятся к функции u при $r \to 1-$ в метрике ρ_p^*.

Следствие 3. *Гармонические полиномы двух переменных плотны в пространствах* h^p_{max}, $p > 0$ *и* F-*пространства* h^p_{max}, $p > 0$, - *сепарабельны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию h^p_{max}, $p > 0$, и произвольное число $\varepsilon > 0$, и докажем сначала существование гармонического полинома $P(z) = P(x,y)$, который приближает функцию u в метрике ρ_p^* с точностью, не превосходящей ε. Опираясь на теорему 1, находим функцию $f \in H^p$, $p > 0$, у которой $\mathrm{Re}\, f = u$. Так как алгебраические многочлены комплексного переменного плотны в H^p, $p > 0$, то для числа $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен $Q(z)$, что $\|f - Q\|_p \le \varepsilon/D_p$, где D_p- положительная постоянная в оценке $\|u\|_p^* \le D_p\|f\|_p$, $f \in H^p$, $u = \mathrm{Re}\, f$, $p > 0$, по максимальной теореме Харде-Литтлвуда. Поэтому $\|u - \mathrm{Re}Q\|_p^* \le D_p\|f - Q\|_p \le \varepsilon$ и $P = \mathrm{Re}Q$ - искомый полином, что доказывает первое утверждение следствия 3. Второе его утверждение, с учетом теоремы 3, является прямым следствием известных утверждений о том, что произвольный гармонический полином равномерно на замыкании $\overline{U}$ (а значит, и в метрике пространства h^p_{max}, $p > 0$) приближается гармоническими многочленами с рациональными коэффициентами, множество которых счетно.

Замечание 5. Аналог теоремы 4 для пространств h_p, $p > 0$, не имеет места уже при $p = 1$, как показывает пример функции (1); при $p = 1$ несправедлив также аналог следствия 3. Однако положение воссранавливается при $p > 1$, в силу отмеченной выше эквиваленстности характеристик $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_p^*$.

Московский Государственный Университет им. М. Ломоносова
Ереванский Государственный Инженерный Университет

Литература

1. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. N.-Y.-L. Acad. Press. 1970. XII. 258 p.
2. *Кусис Пю.* Введение в теорию пространств H^p. М. Мир. 1984. 368 с.
3. *Гарнетт Дж. О*граниченные аналитические функции. М. Мир. 1984. 469 с.
4. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.-Л. ГИТТЛ. 1950. 336 с.
5. *Burkholder D. L., Gundy R. F., Silverstein M. I.* - Trans. Amer. Math. Soc. V. 157. N1. P. 137-153.
6. *Гаврилов В. И., Субботин А. В.*- Math. Montisnigri. 2000. N12.
7. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* - Acta Math. 1930.. V. 54. N1-2. P. 81-116.
8. *Kim H. O., Park Y. Y.*- Tsukuba J. Math. 1992. V. 16. N1. P. 11-18.
9. *Fefferman C., Stein E. M.* - Acta Math 1972. V. 129. P. 137-193.
10. *Шведенко С. В.* - Мат. анализ. Т. 23. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН ССР) М. 1985. С. 3-124.
11. *Stoll M.* - Arch. Math. 1974. V. 25. N6. P. 613-618.

Վ. Ի. Գավրիլով, ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ա. Վ. Սուբբոտին

Շրջանում հարմոնիկ ֆունկցիաների Հարդիի մաքսիմալ տարածությունների գծային-տոպոլոգիական հատկությունները

Հարմոնիկ ֆունկցիաների h^p, $p > 0$, դասերը Հարդիի անալիտիկ ֆունկցիաների իրական մասերն են և դա թույլ է տալիս օգտագործել անալիտիկ ֆունկցիաների դասերի համար ստացված նուրբ արդյունքները: Բայց $0 \leq p < 1$ դեպքում այդ հատկությունը դադարում է ճիշտ լինելուց և այդ դեպքում h^p դասի ֆունկցիաները կարող են ունենալ վատ վարք:

Այդ պատճառով ուսումնասիրվում են h^p, $p > 0$ դասերի այն ենթադասերը, որոնց էլեմենտները H^p դասերի իրական մասերն են:

Այս հոդվածում առաջարկվում է նոր մոտեցում h^p, $p > 0$, դասում այդպիսի ենթադասերի ուսումնասիրման համար և ստացվում են տարբեր գծային-տոպոլոգիական հատկություններ: