

ФИЗИКА

УДК 535.016

А. М. Ишханян, Г. П. Черников

Поляритонные спектры для двух специфических симметричных структур

(Представлено академиком Р. А. Казаряном 30/V 2001)

1. Развитие теории поверхностных поляритонов (специального класса поверхностных электромагнитных волн) в многослойных структурах является задачей, имеющей большой практический интерес [1]. Под поверхностным поляритоном понимается локализованная поверхностная электромагнитная волна (с уменьшающейся до нуля амплитудой при неограниченном удалении от границы), распространяющаяся вдоль границы раздела сред с различными электрическими и магнитными свойствами [1,2].

Для волн ТМ типа, когда $\mathbf{H} = (0, \tilde{H}e^{i\omega t}, 0)$, распространяющихся в линейной локально-изотропной среде с зависящей только от одной из координат диэлектрической проницаемостью $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(z)$ ($\tilde{\epsilon} = \epsilon - i4\pi\sigma/\omega$, σ — проводимость среды), $\mu = \text{const}$, амплитуда бегущей волны, распространяющейся вдоль оси x , $\tilde{H}(x, y, z, t) = H(z)e^{ikx}$, описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением [2]

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{1}{U} \frac{dU}{dz} \frac{dH}{dz} - (k^2 + U)H = 0, \quad (1)$$

где принято обозначение $U(z) = -\omega^2 \mu \tilde{\epsilon}(z)/c^2$. Аналогичное уравнение для ТЕ моды электромагнитных волн в таких средах, как известно, совпадает с хорошо изученным одномерным стационарным уравнением Шредингера [2,3]

$$\frac{d^2 E}{dz^2} - (k^2 + U)E = 0. \quad (2)$$

В оптике уравнение (1) имеет смысл называть поляритонным, а уравнение (2) — волноводным. Подобная терминология обоснована тем, что первое уравнение описывает волны, локализованные около одной-единственной границы (поляритонные волны), а второе уравнение допускает локализацию волн (волноводных мод) только при наличии двух стенок, т.е. при наличии волновода, или, по квантовомеханической терминологии, потенциальной ямы.

Очевидно, что в общем случае произвольных градиентных профилей диэлектрической проницаемости поляритонное уравнение с математической точки зрения намного сложнее волноводного. Действительно, если функция $\tilde{\epsilon}(z)$ имеет нули (точнее, при наличии полюсов у ее логарифмической производной), то в уравнении (1) появляются дополнительные особые точки [4]. В зависимости от характера прохождения нуля эти особые точки могут быть как регулярными, так и иррегулярными. Но в любом случае, даже если дополнительные особые точки регулярны, задача намного усложняется, так как соответствующий математический аппарат в настоящее время недостаточно развит [4]. Косвенным подтверждением этого является и то, что первые аналитические решения уравнения (1) для простейших структур, для которых профиль диэлектрической проницаемости имеет нули, были получены лишь недавно [5,6].

Следует заметить, что поскольку $\epsilon(z)$ является комплекснозначной функцией, то предположение о наличии строгого нуля у этой функции не является физически разумным. Однако, со строгой математической точки зрения, этого предположения фактически не требуется. Дополнительные особенности в уравнении (1) возникают, строго говоря, если логарифмическая производная $U(z)$ в некоторых точках комплексной z -плоскости (т.е. при формальном рассмотрении пространственной координаты z в качестве комплексной переменной) имеет (дополнительные) полюса [4]. Поскольку подобная ситуация по сути аналогична случаю, когда профиль диэлектрической проницаемости действителен и пересекает ноль в каких-то точках пространства, то естественным первым шагом в изучении роли дополнительных особенностей является рассмотрение идеализированных случаев без потерь с наличием нулей в профиле диэлектрической проницаемости. В настоящей работе изучается именно такая ситуация: всюду ниже предполагается, что все рассматриваемые параметры действительны. Целью работы является дальнейшее изучение специфической роли указанного дополнительного члена путем сравнения решений поляритонного уравнения с решениями волноводного аналога для определенных модельных структур.

Сначала мы обсуждаем точное аналитическое решение поляритонной задачи (в гипергеометрических функциях Гаусса) для модельной симметричной трехслойной структуры с нулевыми предельными значениями диэлектрической проницаемости при $z \rightarrow \pm\infty$ [2]. Это специфическая модель, не порождающая дополнительных особых точек. Как известно, в случае металлов локализованных решений нет. В случае же диэлектриков для волновых чисел поляритонов получаются два конечных набора дисперсионных соотношений. При этом дисперсионные соотношения из одного набора описывают поляритоны, являющиеся четными функциями z , а дисперсионные соотношения из другого набора описывают нечетные по z поляритоны. Так как число мод растет с ростом $\tilde{\epsilon}(0) > 0$, то в целом поведения ТМ и ТЕ волн при данном профиле, как и следовало ожидать, качественно схожи.

Далее для сравнения мы рассматриваем модель, которая в противоположность предыдущему случаю порождает дополнительную особую точку. Это — параболическая модель с нулем в точке $z = 0$. Отличительным свойством данной модели с неограниченно растущими предельными значениями является существование единственной моды при $\tilde{\epsilon}(z = \pm\infty) = -\infty$

(металлическая среда) и отсутствие поверхностных волн при $\tilde{\varepsilon}(z = \pm\infty) = +\infty$. (Как показано в [6], при профиле с аналогичным параболическим касанием нуля, но с конечными отрицательными предельными значениями существует также единственный поляритон, а при положительных предельных значениях либо не существует (при больших $\tilde{\varepsilon}_{\pm\infty}$), либо существуют два поляритона (при достаточно малых $\tilde{\varepsilon}_{\pm\infty}$). Как хорошо известно, в аналогичном волноводном [2] и квантовомеханическом [3] случаях число мод (связанных состояний гармонического осциллятора) бесконечно.

2. Первая симметричная структура, рассматриваемая в настоящей работе, задается следующей зависимостью диэлектрической проницаемости от пространственной координаты

$$\tilde{\varepsilon}(z) = \tilde{\varepsilon}_0 \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right) \right], \quad (3)$$

которая соответствует функции $U(z) = V_0 \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right) \right]$, $V_0 = -\frac{\omega^2 \mu}{c^2} \tilde{\varepsilon}_0$. Если применить к уравнению (1) преобразование независимой переменной $\xi = \operatorname{th} \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right)$, взаимно однозначно отображающее интервал $(-\infty, +\infty)$ на отрезок $[-1, +1]$, то данное уравнение преобразуется в уравнение с рациональными коэффициентами, относящееся к фуксову типу [4]:

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - \frac{4(k^2 + V_0(1 - \xi^2))\tau^2}{(1 - \xi^2)^2} H = 0. \quad (4)$$

Еще одна замена независимой переменной $\xi^2 = \zeta$ (квадратичное преобразование, отображающее $[-1, 1]$ на $[0, 1]$) и замена искомой функции

$$H(\zeta) = (1 - \zeta)^{(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 k^2})/2} u(\zeta) \quad (5)$$

приводит исходное уравнение (1) к канонической форме гипергеометрического уравнения Гаусса [4, 7]:

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \left(\frac{1/2}{\zeta} + \frac{1 + \sqrt{1 + 4k^2 \tau^2}}{\zeta - 1} \right) \frac{du}{d\zeta} + \frac{1/4 + (k^2 + V_0)\tau^2 + \sqrt{1/4 + k^2 \tau^2}/2}{\zeta(\zeta - 1)} u = 0. \quad (6)$$

Произвольное решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию двух частных линейно независимых решений, в качестве которых могут быть выбраны функции [4, 7] ${}_2F_1(a, b, c, \zeta)$ с параметрами

$$a, b = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + k^2 \tau^2} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - V_0 \tau^2}, \quad c = \frac{1}{2} \quad (7)$$

и $\sqrt{\zeta} {}_2F_1(a', b', c', \zeta)$, где

$$a' = a + \frac{1}{2}, \quad b' = b + \frac{1}{2}, \quad c' = \frac{3}{2} \quad (8)$$

Отметим, что функция ${}_2F_1(a, b, c, \zeta)$ после обратной замены $\zeta \rightarrow z$ будет четной функцией z , а $\sqrt{\zeta} {}_2F_1(a', b', c', \zeta)$ — нечетной. Очевидно, оба эти линейно независимых решения ограничены при $\zeta = 0$.

Рассмотрим теперь, как ведут себя эти решения при $\zeta \rightarrow 1$. По известной формуле аналитического продолжения гипергеометрических функций Гаусса [7] видно, что ${}_2F_1(a, b, c, \zeta)$ ограничена при $\zeta \rightarrow 1$, только если a или b равны нулю или отрицательному целому числу (так как $c - a - b = -\sqrt{1 + 4\tau^2 k^2} < 0$ и потому $(1 - \zeta)^{c-a-b}$ расходится при $\zeta \rightarrow 1$). Так как всегда $a > 0$, то ${}_2F_1(a, b, c, \zeta)$ является ограниченной на $[0, 1]$ только тогда, когда $b = -n$ или

$$\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + k^2 \tau^2} - \sqrt{\frac{1}{16} - V_0 \tau^2} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}, \quad (9)$$

где $n_{\max}$ есть целая часть величины $\sqrt{\frac{1}{16} - V_0 \tau^2} - 3/4$.

Ограниченности ${}_2F_1(a, b, c, \zeta)$ на $[0, 1]$ достаточно для существования локализованного решения. Действительно, так как $(1 - \zeta)^{(1 + \sqrt{1 + 4\tau^2 k^2})/2} \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow 1$, то $H(\xi = \pm 1) = H(z = \pm \infty) = 0$ и условие существования поляритона выполнено. Заметим еще, что при выполнении условия (9) ${}_2F_1(a, b, c, \zeta)$ является полиномом n -го порядка, который удобно выразить через так называемые гипергеометрические полиномы $G_n(\beta, c, \zeta) = {}_2F_1(-n, n + \beta, c, \zeta)$ [4], представляющие собой обобщение хорошо известных ортогональных полиномов Якоби и их различных спецификаций, таких, как полиномы Лежандра и Гегенбауэра [4, 7]. Окончательно соотношение (5) дает нам набор поляритонных решений, записанных для переменной ζ в виде

$$H_{1n}(\zeta) = H_0(1 - \zeta)^{(1 + \sqrt{1 + 4k_{1n}^2 \tau^2})/2} G_n\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + 4k_{1n}^2 \tau^2}, \frac{1}{2}, \zeta\right), \quad H_0 = \text{const.} \quad (10)$$

Для исходной пространственной переменной z данное поляритонное решение уравнения (1) выглядит так:

$$H_{1n} = H_0 \left(1 - \text{th}^2\left(\frac{z - z_0}{2\tau}\right)\right)^{\frac{1 + \sqrt{1 + 4k_{1n}^2 \tau^2}}{2}} G_n\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + 4k_{1n}^2 \tau^2}, \frac{1}{2}, \text{th}^2\left(\frac{z - z_0}{2\tau}\right)\right). \quad (11)$$

Как видно, это — набор четных по z функций. Разрешая (9) относительно k , получаем дисперсионное соотношение для волнового числа

$$k_{1n}^2 \tau^2 = -\frac{1}{4} + \left[-\left(n + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{\frac{1}{16} - V_0 \tau^2}\right]^2. \quad (12)$$

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести для другого решения уравнения (6) — $\sqrt{\zeta} {}_2F_1(a', b', c', \zeta)$. В этом случае при выполнении равенств $b' = -n$ или

$$\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + k^2 \tau^2} - \sqrt{\frac{1}{16} - V_0 \tau^2} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max} \quad (13)$$

(теперь $n_{\max}$ есть целая часть величины $\sqrt{1/16 - V_0 \tau^2} - 5/4$) мы получаем другой набор поляритонных решений уравнения (1). Решения эти для исходной пространственной переменной z имеют вид

$$H_{2n} = H_0 \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right) \right)^{\frac{1 + \sqrt{1 + 4k_{2n}^2 \tau^2}}{2}} \operatorname{th} \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right) \times \\ \times G_n \left(\frac{3}{2} + \sqrt{1 + 4k_{2n}^2 \tau^2}, \frac{3}{2}, \operatorname{th}^2 \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right) \right). \quad (14)$$

Как видно, поляритоны данного набора являются нечетными функциями z . Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$k_{2n}^2 \tau^2 = -\frac{1}{4} + \left[-\left(n + \frac{3}{4} \right) + \sqrt{\frac{1}{16} - V_0 \tau^2} \right]^2. \quad (15)$$

В случае металлов ($V_0 \sim -\tilde{\epsilon}_0 > 0$), а также диэлектриков с $V_0 > -1/(2\tau^2)$ условия (9) или (13) не выполняются ни для каких $n \geq 0$. Следовательно, локализованных решений нет. А в диэлектрических средах с $V_0 < -1/(2\tau^2)$ существуют, вообще говоря, два конечных набора локализованных ТМ волн. Поверхностные электромагнитные волны, принадлежащие набору, описываемому дисперсионным соотношением (12), являются четными функциями пространственной координаты. Дисперсионное же соотношение (15) описывает другой конечный набор поляритонных волн, представляющих собой нечетные функции координаты.

Здесь стоит вновь обсудить одно важное обстоятельство. Как уже было сказано выше, наличие дополнительного члена в уравнении для ТМ моды могло бы привести к отличиям в условиях существования локализованных решений для соответствующих волн (см., например, [6], где рассмотрена ситуация для профиля $\tilde{\epsilon}(z) = \tilde{\epsilon}_0 \operatorname{th}^2 \left(\frac{z - z_0}{2\tau} \right)$). Однако в случае, рассмотренном выше наличие члена $-\frac{1}{U} \frac{dU}{dt} \frac{dH}{dz}$, как видим, не приводит к качественным отличиям. В самом деле, уравнение ТЕ волны — это одномерное стационарное уравнение Шредингера с $U(z)$ в качестве потенциала. При $\tilde{\epsilon}_0 < 0$ профиль U представляет собой потенциальный барьер, и хорошо известный результат квантовой механики говорит, что в данном случае связанных состояний нет [3]. При $\tilde{\epsilon}_0 > 0$ профиль U представляет собой потенциальную яму. Как известно, тогда существует конечное число связанных состояний квантовомеханической частицы [3]. При этом количество связанных состояний растет с увеличением глубины потенциальной ямы (т.е. с ростом $\tilde{\epsilon}_0$ в нашем случае). Причиной отсутствия качественных различий между ТМ и ТЕ волнами, очевидно, является то, что, во-первых, данный профиль (3) не добавляет новых особых точек в уравнение (1) по сравнению с уравнением (2) и, во-вторых, не изменяет ранг сингулярности уже имеющихся особых точек, $z = 0, \pm\infty$.

3. Рассмотрим теперь профиль диэлектрической проницаемости, который радикально отличается от предыдущего тем, что соответствующее поляритонное уравнение имеет дополнительную особую точку по сравнению с волноводным. Одним из простейших подобных профилей является параболический, имеющий единственный ноль в точке, скажем, $z = 0$:

$$\tilde{\varepsilon}(z) = \pm z^2/\tau^2, \quad (16)$$

где параметр τ задает кривизну профиля. Очевидно, что знак плюс соответствует диэлектрической среде, а знак минус – металлической.

Исходное поляритонное уравнение (1) для данного профиля

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{2}{z} \frac{dH}{dz} - (k^2 + Gz^2)H = 0, \quad G = -\left(\pm \frac{\omega^2 \mu}{c^2 \tau^2}\right) \quad (17)$$

имеет три особые точки: $z = 0, \pm\infty$. Как видно, наличие второго слагаемого никак не затронуло характер сингулярностей в особых точках $z = \pm\infty$. При этом дополнительная особенность в точке $z = 0$ – чисто результат наличия нуля у профиля (16) в данной точке. Как мы убедимся, наличие этой особой точки, несмотря на то, что это регулярная особая точка, существенным образом меняет условия существования локализованных решений.

После замены зависимой переменной $H(z) = e^{-\sqrt{G}z^2/2}u(z)$ уравнение (17) принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - 2\left(\sqrt{G}z + \frac{1}{z}\right)\frac{du}{dz} - (k^2 - \sqrt{G})u = 0. \quad (18)$$

При $k^2 = \sqrt{G}$ это уравнение решается тривиально. В результате для магнитного поля получаем простое выражение:

$$H = e^{-\sqrt{G}z^2/2} \left(C_1 + C_2 \int_0^z z^2 e^{\sqrt{G}z^2} dz \right). \quad (19)$$

Второе слагаемое неограниченно растет при $z \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, положив $C_2 = 0$, получаем решение в элементарных функциях:

$$H = H_0 e^{-\sqrt{G}z^2/2}, \quad H_0 = \text{const}. \quad (20)$$

Покажем, что это единственно возможное поляритонное решение, допускаемое параболическим профилем (16). Действительно, квадратичная замена независимой переменной $\zeta = \sqrt{G}z^2$ переводит уравнение (18) в вырожденное гипергеометрическое уравнение [4,7]

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \left(\frac{-1/2}{\zeta} - 1 \right) \frac{du}{d\zeta} - \frac{a}{\zeta} u = 0, \quad (21)$$

где параметр a определен как $a = \frac{k^2}{4\sqrt{G}} - \frac{1}{4}$. В соответствии с этим общее решение задачи выражается через стандартные решения вырожденного гипергеометрического уравнения [7]

$$H = e^{-\sqrt{G}z^2/2} [C_1 \cdot {}_1F_1(a, -1/2, \sqrt{G}z^2) + C_2 \cdot \psi(a, -1/2, \sqrt{G}z^2)], \quad (22)$$

где ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция Кумера, ψ – функция Трикоми [7].

Исследование условий ограниченности амплитуды магнитного поля при бесконечном удалении от точки, где диэлектрическая проницаемость обращается в нуль, показывает, что должно быть $a = -n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Как видно, возможен только вариант $a = 0$, соответствующий элементарному решению (20) с поляритонным волновым числом $k^2 = \sqrt{G}$. Очевидно, в средах

без потерь данный длинномасштабный поляритон может реализоваться лишь для металлов ($\tilde{\epsilon} < 0$), для которых $G > 0$.

Таким образом, при симметричном параболическом профиле с единственной нулевой точкой и неограниченными на бесконечности предельными значениями проницаемости в диэлектрических средах поляритон отсутствует, а в металлических средах существует единственная мода с простейшим по структуре поляритонным дисперсионным соотношением, определяемым кривизной профиля диэлектрической проницаемости:

$$k^2 = \frac{\omega}{c} \frac{\sqrt{\mu}}{\tau}. \quad (23)$$

Амплитуда магнитного поля поляритона (записывающаяся, как уже было отмечено, в элементарных функциях (20)) имеет симметричное пространственное распределение.

Заметим в заключение, что параболический профиль (16) является пределом профиля $\tilde{\epsilon}(z) = \tilde{\epsilon}_0 th^2\left(\frac{z-z_0}{2\tau_1}\right)$, если положить $\tilde{\epsilon}_0 = \pm 4\tau_1^2/\tau^2$ и устремить τ_1 к бесконечности. Примечательно, что дисперсионное соотношение $k^2 = (1 + \sqrt{1 + 16\tau_1^2 U_0})/8\tau_1^2$, $U_0 = -\tilde{\epsilon}_0 \omega^2 \mu / c^2$, полученное в [6] для данного профиля, в указанном пределе совпадает с (23).

Выражаем благодарность Ашоту Манукяну, Асмик Казарян и Армену Мирзаханяну за критическое чтение рукописи.

Работа выполнена при поддержке грантов Международного научнотехнического центра (ISTC No. A-215-99) и Армянского национального фонда науки и образования (ANSEF No. PS-1).

Инженерный центр НАН Армении

РНЦ "Курчатовский институт", Институт ядерного синтеза

Ա. Մ. Իշխանյան, Գ. Պ. Չեռնիկով

Պոլյարիտոնային սպեկտրերը երկու հատուկ սիմետրիկ կառուցվածքների համար

Դիտարկված է մակերևութային լոկալիզացված էլեկտրամագնիսական ալիքների խնդիրը միջավայրի դիէլեկտրական թափանցելիության երկու տարբեր մոդելային սիմետրիկ պրոֆիլների համար: Առաջինը մակերևութից անսահման հեռավորության վրա զրոյի ձգտող նշանահաստատուն մոդելն է, որի դեպքում սկզբունքորեն իրականանում են վերջավոր թվով պոլյարիտոնային մոդաներ (միայն դիէլեկտրական միջավայրերի դեպքում): Երկրորդը միայն մի կետում զրո ունեցող պարաբոլականն է: Ցույց է տրված, որ այս դեպքում լինում է ընդամենը մեկ պոլյարիտոն (միայն մետաղական միջավայրերի դեպքում):

Литература

1. *Boardman A. D. (ed.).* Electromagnetic Surface Modes. London, Wiley, 1982.
2. *Snyder A. W., Love J. D.* Optical Waveguide Theory. London, 2000.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М. Наука. 1989.
4. *Slavyanov S. Yu., Lay W.* Special functions, Oxford, 2000.
5. *Исиханян А. М.* - ДНАН Арм. 2001. Т.101. N2. С.245-251.
6. *Исиханян А. М., Черников Г. П.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2001. Т. 36. N6. С. 303.
7. *Abramovitz M., Stegun I. A. (ed.)* - Handbook of Mathematical Functions. Dover. N. Y. 1965.