ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 102 2002 № 2

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62.50

Д. И. Бардзокас

О задаче граничного управления колебательной системой

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 29/X 2001)

В статье приводится решение задачи граничного управления системой в широком классе пространств.

1. Поиску оптимального граничного управляющего воздействия для системы с распределенными параметрами посвящено большое число работ [1-17]. Как известно, первые публикации на эту тему принадлежат А. Г. Бутковскому. Методы решения этих задач состоят в сведении их к некоторой проблеме моментов в гильбертовом пространстве.

Предлагаемый в настоящей статье подход, не использующий метода моментов, позволяет решить задачу в широком классе пространств, включая $L^p[0,T], 1 \leq p \leq \infty$. При этом предполагается, что граничные операторы имеют достаточно общий вид, но одинаковы на левом и правом концах. Синтез предложенного здесь метода и метода моментов позволит найти оптимальное управление и в других случаях.

2. Обратимся непосредственно к задаче оптимального управления однородной распределенной системы, закон движения которого описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad Q = Q(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \tag{1}$$

при начальных и граничных условиях

$$Q(x,0) = Q_0(x), \frac{\partial Q}{\partial t}(x,0) = Q_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$L[Q]|_{x=0} = u(t), \ \ L[Q]|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

с граничным оператором L, определяемым формулой

$$L[Q]=\sum_{j=0}^{r}\left(a_j(t)\frac{\partial^j Q}{\partial x^j}+b_j(t)\frac{\partial^j Q}{\partial t^j}\right), \quad (r=0,1), \tag{4}$$

где $a_j(t), b_j(t)$ периодические с периодом 1 функции.

Пусть B − одно из функциональных пространств $L_{\Phi,\sigma}$ определяемое неубывающей функцией $\sigma(t)$ с нормой

$$||u||=\Phi^{-1}\left(\int_0^T \Phi(|u(t)|)d\sigma(t)\right).$$

Дополнительно предположим, что обобщенная функция $d\sigma(t)/dt$ является периодической с периодом 2. Пространства $L^p_\sigma[0,T], L^p[0,T]$ при $1 \le p < \infty$ принадлежат семейству $\{L_{\Phi,\sigma}\}$. Кроме того, пространства $L^\infty[0,T]$ или, в общем случае, пространства $L^\infty_{p(t)}[0,T]$, где существенно ограниченная $p(t) \ge 0$ на $[0,T]$, с нормой

$$||u||=vrai\max_{[0,T]}(p(t)|u(t)|), \tag{5}$$

также включаются с "сферу" рассмотрения.

Функция $u(t)$ из (3) является управляющей. Она принадлежит одному из отмеченных пространств и выбирается из следующих условий: 1) $u(t)$ такова, что

$$Q(x,T)=R_0(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t)=R_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{6}$$

с заданными $R_0(x)$, $R_1(x)$; 2) $\|u\|_B \to \min$.

Итак, задача состоит в выборе управления $u \in B$ такого, что $Q(x,t)$ переходит за время T из начального состояния (2) в конечное состояние (6) с минимальными "затратами" $\|u\|_B$. В качестве "затрат" может фигурировать и норма некоторой производной управляющей функции: $\left\|u^{(s)}\right\|_B \to \min$.

3. Общее решение уравнения (1) можно записать в виде $Q(x,t)=\varphi(t-x+1)+\psi(t+x)$, где φ и ψ − произвольные дважды дифференцируемые функции с областью определения $[0,T+1]$. Из условий (6) получаем

$$\begin{aligned}&\varphi(T+1-x)=\frac{1}{2}[R_0(x)-R_1^*(x)+C^{(2)}],\\&\psi(T+1)=\frac{1}{2}[R_0(x)+R_1^*(x)-C^{(2)}], \quad 0 \le x \le 1,\end{aligned} \tag{7}$$

где C^2 произвольная постоянная, а

$$Q_1^*(x)=\int_0^x Q_1(s)ds, \quad R_1^*(x)=\int_0^x R_1(s)ds.$$

Пусть $T=2k+\varepsilon$, $k \ge 1$,− целое положительное число, $0 \le \varepsilon < 2$. Подставим $Q(x,t)=\varphi(t-x+1)+\psi(t+x)$ в (3) и предположим $c_j(t)=(-1)^j a_j(t)+b_j(t)$, $d_j(t)=a_j(t)+b_j(t)$.

Тогда

$$\sum_j [c_j(t)\varphi^{(j)}(t+1) + d_j(t)\psi^{(j)}] = u(t), \tag{8}$$

$$\sum_j [c_j(t)\varphi^{(j)}(t) + d_j(t)\psi^{j}(t+1)] = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{9}$$

Используя выражение (9) найдем

$$u(t) = \omega(t) - \omega(t+2), \quad 0 \le t \le T-1, \tag{10}$$

где

$$\omega(t) = \sum_j d_j(t)\psi^{(j)}(t), \quad 0 \le t \le T+1.$$

Определение $\omega(t)$ можно дополнить с помощью (7) и (9) следующим образом:

$$\omega(t) = -\sum_j c_j(t)\psi^{(j)}(t-1), \quad T+1 \le t \le T+2, \tag{11}$$

что справедливо при всех t: $0 \le t \le T$.

Лемма. *Пусть $B = L_{\Phi,\sigma}[0,T]$. Для любых $f_0, f_1, \dots, f_k \in B$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k}\int_0^T \Phi(f_m(t))d\sigma(t) \ge \int_0^T \Phi\Big(\frac{1}{k+1}\Big|\sum_{m=0}^{k} f_m(t)\Big|\Big)d\sigma(t), \tag{12}$$

в котором равенство достигается при $f_0(t) = f_1(t) = \ldots = f_k(t)$.

Разобьем $[0,T]$ на частичные интервалы $I_m[2m, 2m+\varepsilon), m = 0,1,\dots,k; I_m[2m+\varepsilon, 2m+2), m = 0,1,\dots,k-1$, и с учетом леммы для оптимального управления $u^0(t)$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&u^0(t) = \frac{1}{2(k+1)}\Big\{\sum_j d_j(t)[Q_0^{(j)}(t) + Q_1^{*(j)}(t)] + \sum_j c_j(t)(-1)^j \times \\
&\times [R_0^{(j)}(\varepsilon - t) - R_1^{*(j)}(\varepsilon - t)] - d_0(t)c\Big\}, \quad 0 \le t \le \varepsilon, \\
&u^0(t) = \frac{1}{2k}\Big\{\sum_j d_j(t)[Q_0^{(j)}(t) + Q_1^{*(j)}(t)] - \sum_j d_j(t) \times \\
&\times [R_0^{(j)}(t-\varepsilon) + R_1^{*(j)}(t-\varepsilon)] - d_0(t)c\Big\}, \quad \varepsilon < t \le 1, \\
&u^0(t) = \frac{1}{2k}\Big\{-\sum_j c_j(t)(-1)^j[Q_0^{(j)}(2-t) - Q_1^{*(j)}(2-t)] - \sum_j d_j(t) \times \\
&\times [R_0^{(j)}(t-\varepsilon) + R_1^{*(j)}(t-\varepsilon)] - d_0(t)c\Big\}, 1 < t \le 1+\varepsilon, \\
&u^0(t) = \frac{1}{2k}\Big\{-\sum_j c_j(t)(-1)^j[Q_0^{(j)}(2-t) - Q_1^{*(j)}(2-t)] + \sum_j c_j(t)(-1)^j \times \\
&\times [R_0^{(j)}(\varepsilon+2-t) - R_1^{*(j)}(\varepsilon+2-t)] - d_0(t)c\Big\}, \quad 1+\varepsilon < t \le 2, \\
&c = c^{(1)} - c^{(2)}, \quad u(t+2) = u(t) \quad (t > 0),
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\min ||u||_{L_{\Phi,\sigma}} = ||u^0|| = \Phi^{-1} \int_0^T \Phi(|u^0(t)|)d\sigma(t).$$

Случай $1 \le \varepsilon < 2$ рассматривается аналогично. Функция $u^0(t)$ описывается формулами (13) с тем лишь отличием, что t изменяется в интервалах $[0, \varepsilon - 1), [\varepsilon - 1,1), [1, \varepsilon), [\varepsilon, 2]$.

При минимизации нормы управления $u(t)$ в пространствах $L^{\infty}_{p(t)}[O,T]$ с нормой (5) рассуждаем несколько иначе. Вместо (12) используется очевидное неравенство

$$\max_{0\le j\le k}\{||f_j|| \ge \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}||f_j|| \ge \frac{1}{k+1}\Big|\Big|\sum_{j=0}^{k} f_j\Big|\Big|\}, \quad f_j \in L^{\infty}_{p(t)}, \tag{14}$$

равенство в котором достигается при $f_0 = f_1 = \ldots = f_k$.

Итак, получим следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $s = 0, T \ge 2$. В каждом из пространств $L_{\Phi,\sigma}[0,T], L^{\infty}_{p(t)}[0,T]$ − задача граничного оптимального управления имеет решение, общее для всех пространств. Оптимальная управляющая функция является 2- периодичной, заданной кусочно на периоде выражениями (13).*

4. Рассмотрим некоторые конкретные ситуации. Пусть граничные условия (3) отвечают условию закрепления концов: $Q(0,t) = u(t)$, $Q(1,t) = 0$. В этом случае $c_0(t) \equiv 1, d_0(t) \equiv 1$, $c_j(t) = d_j(t) \equiv 0$ при $j \ge 1$. Найдем ответ в задаче "успокоения" [2], когда $R_0x = R_1(x) \equiv 0$. Из теоремы следует, что оптимальное управление $u^0(t)$ в каждом из пространств $L_{\Phi,\sigma}$ и $L^{\infty}_{p(t)}$ выражается формулой $u^0(t+2) = u^0(t)$ и

$$u^0(t) = \begin{cases} (2(k+1))^{-1}[Q_0(t) + Q_1^*(t) - c], & 0 \le t \le \varepsilon, \\ (2k)^{-1}[Q_0(t) + Q_1^*(t) - c], & \varepsilon < t \le 1, \varepsilon < 1, \\ (2k)^{-1}[-Q_0(2-t) + Q_1^*(2-t) - c], & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Пусть $L[f] = \partial f/\partial x$ и $Q_0(x) = Q_1(x) \equiv 0$. В этом случае $u^0(t+2) = u^0(t)$ и

$$u^0(t) = \begin{cases} (2(k+1))^{-1}[R_0'(\varepsilon - t) - R_1(\varepsilon - t)], & 0 \le t \le \varepsilon, \\ (2k)^{-1}[-R_0'(t-\varepsilon) - R_1(t-\varepsilon)], & \varepsilon < t < 1+\varepsilon, \\ (2k)^{-1}[R_0'(2+\varepsilon - t) - R_1(2+\varepsilon-t)], & 1+\varepsilon < t \le 2. \end{cases}$$

По поводу этого примера заметим, что фактически вместо условий (3) здесь использованы дифференциальные условия (3) и потому оптимальное движение $Q(x,t)$ определяется с точностью до движения стержня как твердого тела. В отличие от рассмотренной здесь задачи в работе [11] исследования проводятся в пространстве $L^2[0,T]$.

5. Сформулированная теорема позволяет также найти решение задачи в случае одинаковых и различных операторов.

Отметим некоторые простые случаи:

(a) $\quad L[Q]|_{x=0} = u(t), \quad Q|_{x=1} = 0;$

(b) $\quad L[Q]|_{x=0} = u(t), \quad \left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x=1} = 0.$

В задаче (a) при $a_{2j+1}(t) \equiv 0,\ j = 0,1,\ldots$ решение определяется доказанной теоремой. В той же задаче при $a_{2j}(t) + b_{2j}(t) \equiv 0,\ b_{2j+1}(t) \equiv 0,\ j = 0,1,\ldots$ так же можно найти ответ, в котором $u^0(t+2) = -u^0(t)$. Чтобы не усложнять выкладки, рассмотрим случай $Q(0,t) = u(t), (\partial Q/\partial x)(1,t) = 0$. Граничные условия приводят к равенствам

$$u(t) = \begin{cases} \psi(t) + \psi(t+2) + c, & 0 \le t \le T-1 \\ \psi(t) + \psi(t+2), & T-1 < t \le T \quad c = const \end{cases}$$

Если принять $\omega(t) = \psi(t) + c/2, 0 \le t \le T+1$ и $\omega(t) = \varphi(t-1),\ T+1 < t \le T+2$, то $u(t) = \omega(t) + \omega(t+2), 0 \le t \le T+2$. Полагая в (12) $f_m(t) = (-1)^m[\omega(t+2m) + \omega(t+2m+2)]$, находим оптимальное управление $u^0(t)$, относительно которого отметим $u^0(t+2) = -u^0(t)$.

В задаче (b) при $a_{2j+1}(t) \equiv 0$ вновь $u^0(t+2) = -u^0(t)$, а при $a_{2j}(t) + b_{2j}(t) \equiv 0,\ b_{2j+1}(t) \equiv 0$ ответ следует из теоремы.

Вместо граничного управления можно рассмотреть также распределенное управление $v(x)w(t)$ в правой части уравнения (1) с заданной функцией $v(x)$. Эти задачи сводятся к проблеме моментов, которая позволяет сформулировать эквивалентную задачу граничного управления.

Работа выполнена в рамках договора о научном сотрудничестве между Афинским национальным техническим университетом и Институтом механики НАН РА.

Афинский национальный технический университет

Դ. Ի. Բարձոկաս

Տատանողական համակարգի եզրային կառավարման խնդրի մասին

Հոդվածում առաջարկվող մոտեցումը, որը չի օգտագործում մոմենտների տեսության մեթոդը, թույլատրում է ֆունկցիոնալ տարածությունների բավականաչափ լայն դասերում լուծել տատանողական համակարգի օպտիմալ եզրային կառավարման խնդիրը: Ընդ որում ենթադրվում է, որ եզրային օպերատորները ունեն բավականաչափ ընդհանուր տեսք, բայց միջակայքի ծայրակետերում ունեն նույն արժեքները: Այստեղ առաջարկվող մեթոդը հնարավորություն է տալիս գտնել օպտիմալ կառավարման ֆունկցիան նաև այլ դեպքերում: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր:

Литература

1. *Акуленко Л. Д.* - Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 6. С 1095-1103.
2. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* - Механика твердого тела. 1984. №2. С. 35-41.
3. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* - Прикл. математика и механика. 1980. Т.44. Вып.1. С.22-31.
4. *Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.* - Механика твердого тела. 1983, №5. С.33-41.
5. *Болотник Н. Н., Гукасян А. А.* - Механика твердого тела. 1984. №4. С.38-46,
6. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М. Наука. 1975. 568 с.
7. *Бутковский А. Г.* - Автоматика и телемеханика. 1979. №11. С. 112-140.
8. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* - Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М. Наука. 1980. 380 с.
9. *Данилов В. Я., Фоменко А. В.* - Вычисл. и прикл. математика. 1982. Вып. 47. С. 24-37.
10. *Зигмунд А.* - Тригонометрические ряды. М. Мир, 1965. 450 с.
11. *Комков В.* - Теория оптимального управления демпфирования колебаний упругих систем. М. Мир. 1975. 160 с.
12. *Лионс Ж.-Л.* - Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М. Мир. 1972. 415 с.
13. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М. Наука. 1977. 311 с.
14. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л. Машиностроение. 1976. 248 с.
15. *Borrelli R. L.* Differential Equation Models. 1983. P. 310-329.
16. *Eichenauer W. Zeitschr.* Fur Analises und ihre Anwendugen. 1983. Bd. 2(4). P. 299-308.
17. *Lions J.-L.* - Free Boudary Probl. Proc. Seminar. Pavia. 1980. V.2. P. 24-40., R.I., 1969.