ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 102 2002 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

А. М. Джрбашян, К. Л. Аветисян

К общей теории классов регулярных функций, интегрируемых с весом по площади круга

(Представлено академиком В. С. Захаряном 11/XII 2001)

В статье приведены обобщения основных теорем М. М. Джрбашяна [1, 2], по сути положивших начало теории весовых пространств A_α^p [1] и теории факторизации функций, мероморфных в круге [9-11]. Обобщены также некоторые более поздние результаты других авторов, относящиеся к пространствам A_α^p и весовым классам Р. Неванлинны, определяемым условием

$$N_\alpha^0: \qquad \int_0^1 (1-r)^\alpha T(r,f)dr < +\infty, \quad -1<\alpha<+\infty,$$

где $T(r,f)-$ характеристика роста мероморфной функции (см. [12], пункт 216). Взамен $(1-r^2)^\alpha dr$ $(-1<\alpha<+\infty,\ 0<r<1)$ нами использованы общие веса вида $d\omega(r^2)$, что роднит построенную теорию с теорией факторизации М. М. Джрбашяна [9-11].

1. Пространства A_ω^p

1.1 Класс A_ω^p введем как множество всех тех голоморфных в $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых при заданном $0<p<+\infty$

$$||f||_{p,\omega} = \left\{\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1} |f(\zeta)|^p |d\mu_\omega(\zeta)|\right\}^{1/2} < +\infty \tag{1.1}$$

где $d\mu_\omega\big(pe^{i\vartheta}\big) = -d\omega(p^2)d\vartheta$, а функция $\omega(x)$ принадлежит классу Ω_A, т.е. задана на [0,1),

I. $0<\bigvee_\delta^{1-0}\omega<\infty$ при любом $\delta\in[0,1)$,

II. $\Delta_n\equiv\Delta_n(\omega)=-\int_0^{1-0} t^n d\omega(t)\neq 0,\infty, \quad n=1,2,\ldots,$

III. $\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{|\Delta_n|}\geq 1.$

Класс L_ω^p определим аналогично, вместо голоморфности потребовав лишь измеримость.

Замечание 1.1. При любом $p \in (0,+\infty)$ сумма $\cup_{\omega\in\Omega_A} \mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\omega}$ совпадает со множеством всех голоморфных в $|z|<1$ функций, а сумма $\cup_{\omega\in\Omega_A} L^{\mathrm{p}}_{\omega}$ − со множеством всех измеримых в $|z|<1$ функций $F(z)$ таких, что $F(\rho_n e^{i\vartheta}) \in L^p[0,2\pi]$ на какой-либо последовательности $\rho_n \uparrow 1$. Если $\omega \in \Omega_A$, то при любом $p \in [1,+\infty)$ $\mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\omega}$ − банахово пространство с нормой (1.1), а при $p \in [0,1)$ $\mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\omega}$ − полное метрическое пространство[2]. В частном случае $\omega(x) = (1-x)^{1+\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ пространства $\mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\omega}$ $(0<p<+\infty)$ совпадают с $\mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\alpha}$.

Замечание 1.2. Аналогичные $\mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\omega}$ пространства были рассмотрены также в публикациях других авторов, однако были установлены лишь частные результаты, которые возможно было доказать без применения естественного аналитического аппарата, предоставляемого приводимыми ниже формулами представления.

Теорема 1.1. *Если* $f(z) \in \mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\omega}$ *при каких-либо* $\omega \in \Omega_A$ *и* $p \in [1,+\infty)$, *то в* $|z|<1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta) C_\omega(z\overline{\zeta}) d\mu_\omega(\zeta), \tag{1.3}$$

$$f(z) = -\overline{f(0)} + \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} C_\omega(z\overline{\zeta})\{Ref(\zeta)\} d\mu_\omega(\xi), \tag{1.4}$$

где $C_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Delta_k$ $(\Delta_0 = 1)$ − *ядро типа Коши М. М. Джрбашяна.*

При некоторых дополнительных ограничениях на функцию-параметр $\omega \in \Omega_A$ верна следующая теорема о *параметрическом представлении* класса A^2_{ω}.

Теорема 1.2. *Пусть функция* $\widetilde{\omega} \in \Omega_A$ *непрерывно дифференцируема в* $[0,1)$, $\widetilde{\omega}(x) \searrow$, $\widetilde{\omega}(1) \equiv \widetilde{\omega}(1-0) = 0$ и $\widetilde{\omega}(0) = 1$. *Если* $\omega(x)$ − *квадрат Вольтерра функции* $\widetilde{\omega}(x)$, *т.е.*

$$\omega(x) = -\int_x^1 \widetilde{\omega}\left(\frac{x}{t}\right) d\widetilde{\omega}(t), \quad o<x<1 \tag{1.5}$$

то $\omega(x) \in \Omega_A$ и A^2_{ω} *совпадает со множеством всех функций, допускающих представление*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{t\vartheta}) C_{\widetilde{\omega}}(ze^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad |z|<1, \quad \text{где } \varphi(e^{t\vartheta}) \in L^2[0,2\pi]. \tag{1.6}$$

Причем, для любого $f(z) \in \mathrm{A}^2_{\omega}$ *существует единственная функция* $\varphi_0(e^{i\vartheta}) \in H^2$, *с которой верно представление* (1.6):

$$\varphi_0(z) = L_{\widetilde{\omega}} f(z) = -\int_0^1 f(tz) d\widetilde{\omega}(t), \quad |z|<1. \tag{1.7}$$

При этом $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_\omega$ *и* $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ *для любой другой функции* $\varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0,2\pi]$, *с которой верно* (1.6).

Замечание 1.3. При $\widetilde{\omega}(0) = (1-x)^{\frac{1+\alpha}{2}} (\alpha > -1)$ теорема 1.2 по сути переходит в объединение теорем IV и V М. М. Джрбашяна [2]. Как отмечено в [2], для класса Бибербаха $A^2_0 (\alpha = 0)$ представление вида (1.6) впервые было установлено М. В. Келдышем.

Подобная теорема о представлении функций интегралом, взятым по границе круга, верна также в общем случае $1 \le p < +\infty$.

Теорема 1.3. *Класс* $\mathrm{A}^p_\omega(\omega(x) \in \Omega_A,\ p \geq 1)$ *совпадает со множеством всех функций, представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_x^1 C_{\omega_\varepsilon}(ze^{i\vartheta})\varphi(e^{i\vartheta})d\vartheta, \quad |z| < 1, \tag{1.8}$$

где

$$\omega_\varepsilon(x) = -\int\limits_x^1 \varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)d\omega(t), \quad 0 < x < 1,$$

$\varepsilon(x) \in \Omega_A$ $(\varepsilon(1-0) = 0) -$ *непрерывно дифференцируемая на* $[0,1)$ *функция, а функция* $\varphi(z) \in H^1$ *такова, что* $L^{-1}_{\omega_\varepsilon}\varphi(z) \in \mathrm{A}^p_\omega$. *Если* $\varepsilon(x) -$ *функция, обладающая указанными свойствами, то в представлении* (1.8) $\varphi(z) = L_{\omega_\varepsilon}\ f(z) \in H^1$.

Замечание 1.4. В частном случае $\omega(x) = (1-x)^{1+\alpha}$ известны более полные результаты Ф. А. Шамояна [13] $(p=1)$ и одного из авторов [14] $p \geq 1$: *в параметрическом представлении* (1.8) класса A^p_α функции $\varphi(z)$ принадлежат определенным классам О. В. Бесова.

1.3 Формула (1.7) теоремы 1.2 устанавливает изометрию между H^2 и A^2_ω. Следующей же нашей теоремой устанавливается, что при естественных ограничениях на функцию-параметр $\omega(x)$ формула представления (1.3) задает *ортогональный проектор* $L^2_\omega \to \mathrm{A}^2_\omega$. Прежде чем сформулировать эту теорему, отметим, что если $\omega \in \Omega_A$ является невозрастающей функцией, то система

$$e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{\Delta_n}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

является *ортонормальным базисом* в A^2_ω. При этом для любых двух функций

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *из* A^2_ω

$$||f||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\Delta_n} \quad \text{и} \quad (f,g)_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b}_n}{\Delta_n},$$

где $(f,g)_\omega -$ *скалярное произведение, индуцированное из* L^2_ω.

Теорема 1.4. *Если функция* $\omega(x) \in \Omega_A$ *не возрастает на* $[0,1)$ *и* $\overset{1-0}{\underset{0}{\vee}} \omega = 1$, *то оператор*

$$P_\omega f(z) = \iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)C_\omega(z\overline{\zeta})d\mu_\omega(\zeta), \quad |z| < 1, \tag{1.9}$$

является ортогональным проектором $L^2_\omega \to \mathrm{A}^2_\omega$.

Замечание 1.5. Для $\omega(x) = 1 - x$ теорему 1.4 можно найти в [5] и [6]. В весовом же случае $\omega(x) = (1-x)^{1+\alpha}$ $(\alpha > -1)$ теорема 1.4 впервые была установлена в [2].

1.4 Применение части найденных недавно асимптотических оценок ядер привело к следующим теоремам о проекции $L^p_\omega \to \mathrm{A}^p_\omega$ $(1 \leq p < +\infty)$, имеющей место, когда $\omega(x)$ принадлежит некоторым подклассам *функций регулярного поведения,* лежащим в Ω_A. Для наших целей вполне достаточен следующий подкласс.

Определение 1. Будем говорить, что $\omega(x) \in \widetilde{\Omega}_A$, если функция $\omega(x)$ удовлетворяет хотя бы одному из нижеприведенных условий:

(А) при некотором $\alpha > 0$

$$\omega(x) = D_1^{-(1+\alpha)} g(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_x^1 (1-x)^\alpha g(t)dt, \quad 0 \leq x < 1,$$

где $g(x) > 0 -$ непрерывная функция в [0,1), $\int_0^1 t^\alpha g(t)dt = \Gamma(1+\alpha), g(x) \nearrow$ и

I. $(1-x)^{\alpha-1} g(x) \searrow$ если $\alpha > 1$,

II. $(1-x)^{\alpha-\delta} g(x) \searrow$ при некотором $\delta \in (0, \alpha)$, если $0 < \alpha \leq 1$.

(Б) $\omega(x) = \int_0^1 g(t)dt \quad (0 \leq x < 1)$, где $g(x) > 0 -$ непрерывна в [0,1), $\int_0^1 g(t)dt = 1$ и $g(x) \nearrow$, но $(1-x)^{1-\delta} g(x) \searrow$ при некотором $\delta \in (0,1)$.

Замечание 1.6. $\widetilde{\Omega}_A \subset \Omega_A$, и оба эти класса содержат функции $\omega(x)$, для которых

$$|\omega'(x)| \asymp (1-x)^\alpha \log^\beta \frac{1}{1-x} \quad \text{при} \quad x \to 1-0, \quad \forall \alpha \in (-1, +\infty), \quad \forall \beta > 0.$$

Теорема 1.5. *Пусть* $\omega_1(x) \in \Omega_A$ *непрерывно дифференцируемо в* [0,1), *а* $\omega_2(x) \in \widetilde{\Omega}_A$. *Если* $(1-x)^{-\beta} |\omega_1'(x)| \searrow$ *при каком-либо* $\beta > -1$ *и при каких-либо* $0 < \Delta_1 \leq \Delta_2 < +\infty$

$$\left|\frac{\omega_1'(x)}{\omega_2'}\right| (1-x)^{\Delta_1} \nearrow \quad \text{и} \quad \left|\frac{\omega_1'(x)}{\omega_2'}\right| (1-x)^{\Delta_2} \searrow,$$

то следующий оператор является ограниченным проектором $L^1_{\omega_1} \to A^1_{\omega_1}$:

$$P_{\omega_2} F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} F(\zeta) C_{\omega_2}(z\overline{\zeta}) d\mu_{\omega_2}(\zeta), \quad |z| < 1 \tag{1.10}$$

Теорема 1.6. 1° *Пусть* $\omega_{1,2}(x) \in \Omega_A$ *непрерывно дифференцируемы в* [0,1) *и таковы, что*

$$|\omega_{1,2}'(x)(1-x)^{-\alpha_{1,2}}| \nearrow \quad \text{и} \quad |\omega_{1,2}'(x)(1-x)^{-\beta_{1,2}}| \searrow$$

при некоторых $-1 < \beta_1 \leq \alpha_1 < +\infty$ и $-1 < \beta_2 \leq \alpha_2 < +\infty$. *Если* $\omega_2(x) \in \widetilde{\Omega}_A$ и $\alpha_1 + 1 < p(1 + \beta_2$, *то оператор* (1.10) *является ограниченным проектором из* $L^p_{\omega_1}$ в $A^p_{\omega_1}$ $(1 < p < +\infty)$.

2°. *Если функции* $\omega_{1,2}(x) \in \Omega_A$ *непрерывно дифференцируемы, не возрастают в* [0,1) *и формула* (1.10) *определяет ограниченный оператор на* $L^1_{\omega_1}$ $(1 < p < +\infty)$, *то*

$$\int_0^1 \left|\frac{\omega_2'(x)}{\omega_1'(x)}\right|^q |\omega_1'(x)| dx < +\infty, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{1.11}$$

Теорема 1.7. *Пусть функция* $\omega(x) \in \widetilde{\Omega}_A$ *непрерывно дифференцируема в* [0,1) *и, кроме того,* $|\omega'(x)(1-x)^{-\alpha}| \nearrow$, $\left|\omega'(x)(1-x)^{-\beta}\right| \searrow (0 \leq x < 1)$ *при некоторых* $-1 < \beta \leq \alpha < +\infty$. *Если* $1 < p < \infty$ и $1 + \alpha < p(1+\beta)$, *то формула*

$$\Phi(f) = (f, g)_\omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} d\mu_\omega(\zeta), \quad g \in A^q_\omega,$$

задает общий вид линейного функционала над A^p_ω, т.е. $\left(A^p_\omega\right)^* = A^q_\omega \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Замечание 1.7. В частном случае $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2$ теорема 1,6* содержит наиболее общий результат [8] о необходимых и достаточных условиях, при которых оператор (1.10) является ограниченным проектором $L^p_\alpha \to A^p_\alpha$. Теорема же 1.7 является обобщением теорем [7] и [8] об общем виде линейного функционала над A^p_α.

Замечание 1.8. В [15, 16] получен иной общий вид линейного функционала над A^p_ω при $\omega(x)$ регулярного поведения. Однако эти исследования опираются не на представления самих классов A^p_ω, а на представление М. М. Джрбашяна более широких классов $A^p_\alpha \supseteq A^p_\omega$, что ведет к известному огрублению результатов.

2. Обобщение весового класса Неванлинны

2.1. Функция $u(z)$ δ-субгармонична в области G и $\nu -$ ее ассоциированная мера, если $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ и $\nu = \nu_1 - \nu_2$, где $u_{1,2}(z) -$ субгармонические в G функции с риссовскими мерами $\nu_{1,2}$. Будем говорить, что две δ-субгармонические в G функции $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ и $v(z) = v_1(z) - v_2(z)$ равны, т.е. $u(z) = v(z)$, если $u_1(z) + v_2(z) = u_2(z) + v_1(z)$ всюду в G. Кроме того, будем полагать, что $0 \notin \overline{supp\ \nu}$ для ассоциированной меры ν δ-субгармонической функции $u(z)$ и что ν минимально разложена в смысле Жордана, т.е. $\nu = \nu_+ - \nu_-$ и $(supp\ \nu_+) \cap (supp\ \nu_-) = \emptyset$, где $\nu_\pm -$ положительная и отрицательная вариации меры ν. Мы будем опираться на следующее обобщение неванлинновской характеристической функции:

$$T(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\vartheta})d\vartheta + \int_0^r \frac{n_-(t)}{t}dt, \quad n_-(t) = \iint_{|\zeta<1|} d\nu_-(\zeta), \tag{2.1}$$

которое, вместе с соотношением равновесия $u(0) + T(r,-u) = T(r,u)$ $(0 < r < R)$, порождается аналогом формулы Иенсена – Неванлинны для δ-субгармонических в $|z| < R \le +\infty$ функций. Впредь будем полагать, что $\omega(x) \in \Omega_N$, что означает дополнительное к $\omega(x) \in \Omega_A$ требование $\omega(1) = \omega(1-0) = 0$, а также что $\omega(x)$ тоже разложена на свои положительную и отрицательную вариации, т.е. для всех $x \in [0,1]$

$$\omega(x) = \omega_+(x) - \omega_-(x), \quad \omega_\pm(x) = \int_x^1 (d\omega(t))^\pm, \quad \bigvee_x^1 \omega = \bigvee_x^1 \omega_+ + \bigvee_x^1 \omega_- = \omega_+(x) + \omega_-(x).$$

Определение 2. Классом N°_ω назовем множество тех δ-субгармонических в $|z| < 1$ функций $u(z)$, чьи неванлинновские характеристики (2.1) подчинены условию

$$\int_0^1 T(r,u)|d\omega(r^2)| < +\infty. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Сумма $\bigcup_{\omega\in\Omega_N} N^\circ_\omega$ совпадает со множеством всех δ-субгармонических в $|z| < 1$ функций. Класс тех мероморфных функций $f(z)$, для которых $\log|f(z)| = u(z) \in N^\circ_\omega$, при $\omega(x) = (1-x)^{1+\alpha}$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ совпадает с неванлинновским классом N°_α.

2.2. Для канонического представления классов N°_ω нужна следующая

Теорема 2.1. 1°. *При любом $\omega(x) \in \Omega_A$ и любой фиксированной точке $|\zeta| < 1$ функция*

$$b_\omega(z,\zeta) = \exp\left\{-\int_{|\zeta|^2}^1 C_\omega\left(\frac{zt}{\zeta}\right)\frac{\omega(t)}{t}dt\right\}, \quad |z| < |\zeta|, \tag{2.3}$$

голоморфно продолжается на все $|z| < 1$, *где имеет единственный, простой нуль в* $z = \zeta$.

2°. *При любом* $\omega(x) \in \Omega_A$ *и любой борелевской мере* $\nu \geq 0$, *конечной внутри* $|z| < 1$ *и такой, что* $0 \notin \overline{supp\ \nu}$, *потенциал типа Грина*

$$\iint_{|\zeta|<1} \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta)$$

представляет собой субгармоническую в $|z| < 1$ *функцию, если*

$$\iint_{|\zeta|<1}\left(\int_{|\zeta|^2}^1 |\omega(t)|dt\right)d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Теорема 2.2. *Если* $u(z) \in N_\omega^\circ$ *при каком-либо* $\omega(x) \in \Omega_A$, *то ассоциированная мера* ν *функции* $u(z)$ *подчинена условию*

$$\iint_{|\zeta|<1}\left(\int_{|\zeta|^2}^1 [\omega_+(t) + \omega_-(t)]dt\right)d\nu_\pm(\zeta) < +\infty, \tag{2.4}$$

и в $|z| < 1$ имеет место следующее каноническое представление типа Рисса:

$$u(z) = -u(0) + \iint_{|\zeta|<1} \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} Re\{C_\omega(z\overline{\zeta})\}u(\zeta)d\mu_\omega(\zeta). \tag{2.5}$$

Замечание 2.2. В случае, когда $\omega(x) = (1-x)^{1+\alpha}(-1 < \alpha < +\infty)$ и $u(z) = \log|f(z)|$, где $f(z) -$ мероморфная в $|z| < 1$ функция, $b_\omega(z,\zeta)$ совпадает с фактором типа Бляшке М. М. Джрбашяна[3], а представление (2.5) переходит в его каноническое факторизационное представление [1,2]. Условие же (2.4) переходит в условие

$$\sum_k (1-|z_k|)^{2+\alpha} < +\infty,$$

установленное Р. Неванлинной для нулей и полюсов функций $f(z) \in N_\alpha^\circ$.

Институт математики НАН РА

[1]Первоначальные результаты см. в [3-6], дальнейшие – в монографиях [7] и [8], содержащих множество ссылок. Отметим, что в [8], как и во множестве западных журнальных статей по теории и приложениям пространств A_α^p, имеется ряд приоритетных искажений (см. [7], с.7).

[2]При $0 < p < 1$ величина (1.1) в строгом смысле не является нормой, ибо неравенство треугольника соблюдается лишь с точностью до некоторого постоянного множителя.

[3]Эти же факторы при целых $\alpha = 0,1,2,...$ были позже независимо открыты Цудзи [17] (гл. IV) и недавно переоткрыты в [18], опять же при $\alpha = 0,1,2,...$

Ա. Մ. Ջրբաշյան, Կ. Լ. Ավետիսյան

Միավոր շրջանի մակերեսով, կշռով ինտեգրելի ռեգուլյար ֆունկցիաների դասերի ընդհանուր տեսության մասին

Հոդվածում ընդհանրացված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի այն թեորեմները, որոնք, ըստ էության, $\mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\alpha}$ տարածությունների ու ֆակտորիզացիայի տեսությունների հիմքն են: Ընդհանրացված են նաև այլ հեղինակների ավելի ուշ արդյունքներ, վերաբերվող $\mathrm{A}^{\mathrm{p}}_{\alpha}$ տարածություններին ու Նևանլիննայի կշռային դասին: $(1-r^2)^{\alpha} r dr d\vartheta$ $(-1<\alpha<+\infty, 0<r<1)$ կշիռների փոխարեն օգտագործված են $d\omega(r^2)d\vartheta$ տեսքի ընդեանուր կշիռներ, որոնք մերձեցնում են կառուցվող տեսությունը Մ. Մ. Ջրբաշյանի ֆակտորիզացիայի տեսության հետ:

Литература

1. *Джрбашян М. М.* - ДАН Арм. ССР. 1945. Т. 3. №. 1. С. 3-9.
2. *Джрбашян М. М.* - Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм. ССР. 1948. Т. 2. С. 3-40.
3. *Biberbach L.* - Palermo Rendiconti. 1914. V. 38. P 98 - 118.
4. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* - Mathematische Zeitschrift. 1932. V. 34. P 403 - 439.
5. *Wirtinger W.* - Monatshefte für Math, und Phys. 1932. V. 39. P. 377-384.
6. *Walsh J. L.* Interpolation and approximation by rational functions. AMSoc. Publ. N. Y. 1935.
7. *Djrbashian A. E., Shamoian F. A.* Topics in the theory of A^p_α spaces, Teubner Verlag. Leipzig. 1988.
8. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman Spaces. Springer Verlag. 2000.
9. *Джрбашян М. М.* - Мат. сборник. 1969. Т. 79(121). № 4(8) С. 517-615.
10. *Djrbashian M. M.* In: Proceedings of the International Congress of mathematicians. Vancouver. 1974. P. 197-202
11. *Джрбашян М. М. Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. Наука. М. 1993.
12. *Nevanlinna R.* Eindeutige Analytische Funktionen. Springer. Berlin. 1936.
13. *Шамоян Ф. А.* - Мат. заметки. 1992. Т.52, №1. С. 128-140.
14. *Avetisyan K. L.* Analysis Math. 2000. V.26. №3. P, 161-174.
15. *Шамоян Ф. А.* - ДАН Арм. ССР. 1987. Т. 85. № 1. С. 7-11.
16. *Шамоян Ф. А.* - Сиб. мат. ж. Т. 31. № 2. 1990. С. 197-215.
17. *Tsuji M.* Potential theory in modern function theory. Maruzen Co. Ltd. Tokyo. 1975.
18. *Horowitz Ch.* - Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. No. 3. P 745-751.