ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
102 2002 №1

МЕХАНИКА

УДК 539.1

Член-корреспондент НАН РА А.Г. Багдоев, А.В. Шекоян

Распространение нелинейных звуковых пучков в трехфазной облачной среде

(Представлено 25/VI 2001)

Рассматривается задача определения параметров движения трехфазной среды, состоящей из газа, пара и очагов его конденсации - сферических капель, при прохождении через нее мощного акустического пучка. Предположено, что возмущения фонового постоянного состояния малы и скорости всех фаз v одинаковы. Капли распределены равномерно с начальной концентрацией n_o и радиусом r_1. Считается, что эффективная плотность среды приближенно равна плотности газа ρ. Уравнение движения имеет вид

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}+\nabla P=0, \tag{1}$$

где P суммарное давление газа и пара [1].
Для плотности газа ρ имеет место уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho \operatorname{div}\vec{v}=0; \tag{2}$$

для концентрации капель -

$$\frac{dn}{dt}+n \operatorname{div}\vec{v}=0; \tag{3}$$

для пара, конденсирующегося на каплях-

$$\frac{d\rho_V}{dt}+\rho_V \operatorname{div}\vec{v}=-4\pi n r_1 D(\rho_V-\rho^*)+q, \tag{4}$$

где D - коэффициент диффузии пара в газе [1], q - источник массы, $\rho^*(T)$ - плотность насыщения паров.

Уравнение энергии получается из второго начала термодинамики

$$T\frac{dS}{dt} = c_V\frac{dT}{dt} + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{5}$$

Уравнение (5), уравнение

$$T\frac{ds}{dt} = \operatorname{div}\vec{q}$$

и уравнение притока тепла [1] дают

$$\operatorname{div}\left(\vec{q} + \tau_0\frac{d\vec{q}}{dt}\right) = \operatorname{div}\operatorname{grad}T + \frac{4\pi r_1 DLn}{m\rho}(\rho_V - \rho^*) - Q, \tag{6}$$

где T - температура, L - энергия, выделяющаяся при конденсации одной молекулы воды, m - масса одной капли, Q - источник тепла [1], τ_o - коэффициент тепловой релаксации.

В стационарных условиях (без волны) все искомые величины снабжаются индексом 0, причем условия равновесия

$$q = 4\pi r_1 Dn_0(\rho_V^0 - \rho_0^*), \quad Q = 4\pi r_1 L(m\rho_0)^{-1}(\rho_V^0 - \rho_0^*). \tag{7}$$

Обозначим возмущения параметров тильдой. При этом из уравнения энергии (5), (6) получим

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} - a^2\frac{d\rho}{dt} = \frac{æ}{c_V}(\triangle P - P_0\rho^{-1}\triangle\rho) - \tau_0\frac{æ}{c_V}\frac{\partial}{\partial t}(\triangle P - P_0\rho_0^{-1}\triangle\rho) + \\ + \left[\frac{\tilde{n}}{n_0}(\rho_V^0 - \rho_0^*) + (\tilde{\rho}_V - \rho^*)\right]4\pi r_1 DRLn(c_V m)^{-1},\end{aligned} \tag{8}$$

где взято уравнение идеального газа

$$P = R\rho T, \quad a^2 = \gamma P\rho^{-1}, \tag{9}$$

γ - показатель адиабаты, $\triangle$ - лапласиан.

Выберем ось x по нормали к невозмущенной плоской волне, оси y,z - в касательной к ней плоскости. Обозначим эйконал

$$\tau = \frac{x}{c_n} - t, \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial t'}\right|_\tau - \frac{\partial}{\partial \tau}, \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_t = \frac{1}{c_n}\frac{\partial}{\partial \tau}, \tag{10}$$

где c_n - скорость невозмущенной волны.

Тогда, учитывая порядки малости возмущений

$$\tilde{\rho} \sim \varepsilon, \tau \sim \varepsilon, y, z \sim \varepsilon^{1/2}, v_y, v_z \sim \varepsilon^{3/2}, v_x \sim \varepsilon, \tag{11}$$

а также то, что для скорости звука

$$a^2 \approx c^2 + 2(\gamma - 1)c^2\tilde{\rho}\rho_o^{-1},$$

где c - невозмущенная скорость звука, из (1)-(4) и (8) получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
(\rho_0+\tilde{\rho})\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-\frac{\partial v_x}{\partial \tau}+\frac{v_x}{c_n}\frac{\partial v_x}{\partial \tau}\right)=-\frac{1}{c_n}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau},\\
\rho_0\frac{\partial v_y}{\partial t}=-\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y},\qquad \rho_0\frac{\partial v_z}{\partial t}=-\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z},\\
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}-\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau}+\frac{v_x}{C_n}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau}+(\rho_0+\tilde{\rho})\left(\frac{1}{C_n}\frac{\partial v_X}{\partial \tau}+\frac{\partial v_Y}{\partial Y}+\frac{\partial v_Z}{\partial Z}\right)=0,\\
\frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial t}-\frac{\partial \tilde{\rho}_V}{\partial \tau}-(\rho_v^0+\rho_v)(\rho_0+\tilde{\rho})^{-1}\left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}-\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau}\right)-\frac{v_x}{c_n}\frac{\partial \tilde{\rho}_v}{\partial \tau}+\rho_v^0 v_x\rho_0^{-1}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau}= \qquad (12)\\
=-4\pi r_1 D\left[n_0\left(\tilde{\rho}_v-\tilde{T}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t_0}\right)+\tilde{n}(\rho_v^0-\rho_0^*),\quad c^2\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau}-\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau}+(\gamma-1)c^2\tilde{\rho}\rho_0^{-1}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau}=\right.\\
=\frac{æ}{c_v c_n^2}\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau^2}-\frac{P_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial \tau^2}\right)+\tau_0\frac{æ}{c_v c_n^2}\frac{\partial^{-3}}{\partial \tau^3}\left(\tilde{P}-P_0\rho_0^{-1}\tilde{\rho}\right)+4\pi m^{-1}r_1 D4(\gamma-1)\left[\tilde{n}(\rho_v^0-\rho_0^*)+\right.\\
\left.+n_0\left(\tilde{\rho}_v-\frac{\partial \rho^*}{\partial T}\tilde{T}\right)\right].
\end{gathered}
$$

Из уравнений (12) в порядке 0 (1), т.е. оставляя лишь линейные члены с $\frac{\partial}{\partial \tau}$, получим условия совместности

$$
\tilde{\rho}=\frac{\rho_0}{c_n}v_x,\tilde{\rho}_v=\frac{\rho_v^0}{\rho_0}\tilde{\rho},\tilde{P}=c^2\tilde{\rho},\tilde{T}=(\gamma-1)\tilde{\rho}\frac{T_0}{\rho_0},\tilde{n}=\frac{n_0}{\rho_0}\tilde{\rho}. \qquad (13)
$$

Учитывая (13) в основных порядках $\omega,\omega^{1/2}$, после исключения всех производных по τ, линейно входящих в (12), получим эволюционное уравнение для $\tilde{\rho}$ следующего вида:

$$
\begin{gathered}
2\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial t\partial \tau}+c^2\left(\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial z^2}\right)+\frac{\gamma+1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial\partial \tau}\right)=\\
=\frac{æ(\gamma-1)}{c_V c^2\gamma}\frac{\partial^3\tilde{\rho}}{\partial \tau^3}+\tau_0æ(\gamma-1)c_V^{-1}c^{-2}\frac{\partial^4\tilde{\rho}}{\partial \tau^4}-2\nu_0\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau},
\end{gathered} \qquad (14)
$$

где

$$
\nu_0=2\pi r_1 D\gamma_1 Ln_0(1-\gamma)c^{-2}m^{-1},\ \nu_1=\rho_0^{-1}(2\rho_v^0-\rho_0)-T_0\rho_0^{-1}(\gamma-1)\frac{\partial \rho^*}{\partial T_0}.
$$

Второе слагаемое в (14) дает дифракцию, третье - нелинейность, четвертое - тепловую диссипацию, пятое - дисперсию и шестое - линейное усиление или затухание волны, связанные с наличием пара и капель.

Оставляя только первое и последнее слагаемое, т.е. пренебрегая дифракцией, нелинейностью и теплопроводностью, можно получить значение

$\tilde{\rho}$, откуда вытекает, что поскольку $L > 0$, условия усиления или затухания волны имеют вид

$$\rho_V^0 \gtrless \frac{1}{2}\rho_0^* + \frac{T_0(\gamma-1)}{2}\frac{\partial\rho^*}{\partial T_0}. \tag{15}$$

Условие (15) другим методом получено в [1]. Исходя из верхнего знака в неравенстве (15) в [1,2] обсуждается механизм конденсации пара за счет звуковой волны. Исследование решений эволюционного уравнения (14) позволяет более детально изучить свойства решений за счет нелинейности, дифракции, дисперсии и диссипации. Отметим, что можно получить солитонные решения уравнения (14) [3] и изучить их устойчивость [4], причем в случае нижнего знака в (15) солитоны устойчивы, а верхнего - неустойчивы.

При наличии подаваемых на облако квазимонохроматических волн решение (14) ищем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\Big\{&A(t,\tau',y,z)\exp(i\alpha\tau - \nu\tau' - i\omega\tau') + \\ &+ B(t,\tau',y,z)\exp[2(i\alpha\tau - \nu\tau' - i\omega\tau')] + k.c.\Big\},\end{aligned} \tag{16}$$

где α - основная частота невозмущенной волны, $\tau' = xc_n^{-1}$. Тогда, повторяя выкладки [3], [5], из (14) найдем нелинейное уравнение Шредингера

$$i\alpha\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial\tau'}\right) + \frac{c^2}{2}\Delta_1 A = (ae_1 + æ_2)|A|^2 A, \tag{17}$$

где

$$æ_1 = -3\omega\xi,\ æ_2 = -\left(\nu - \frac{3}{2}\nu_0\right)\xi,\ \omega = \alpha^3\tau_0(\gamma-1)(c_V c^2\gamma)^{-1},$$

$$\begin{aligned}&\xi = \alpha^3(\gamma+1)^2\left\{32\rho_0^2\left[9\omega^2 + \left(\nu + \frac{3}{2}\nu_0\right)^2\right]\right\}^{-1}\exp(-2\nu\tau'),\\ &\nu = \frac{1}{2}\alpha^2æ(\gamma-1)(c_V c^2\gamma)^{-1} + \nu_0,\end{aligned} \tag{18}$$

ω - модулированная частота, ν - линейная диссипация.

Отыскивая решение (17) в виде узких пучков [3], [5]

$$A = bf^{-1}(\tau')\exp\left(\frac{-r^2}{2r_0^2 f^2} + i\varphi\right),\quad \varphi = \sigma(\tau') + \frac{r^2}{2R(\tau')}, \tag{19}$$

где $r^2 = y^2 + z^2$, r_0 - начальный радиус осесимметричного пучка, b - постоянная амплитуда на входе в среду ($x = 0$), $f(\tau')$ - безразмерная ширина пучка, σ - набег фазы, $\alpha c_n^{-1}R(\tau')$ - радиус кривизны фронта пучка, из (17), с учетом (19), получим уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\tau'^2} = \frac{M}{f^3} + \frac{2æ_2\nu b^2}{\alpha f}, \tag{20}$$

где

$$M = \alpha^{-2}\left(\frac{c^4}{r_0^4} + 2æ_1\frac{b^2c^2}{r_0^2} - æ_2^2 b^4\right), \tag{21}$$

причем начальные условия для f имеют вид

$$f(0) = 1, \quad \frac{df(0)}{d\tau'} = F, \quad F = \frac{2c^2}{\alpha R_0} - \frac{æ_2 b^2}{\alpha}, \tag{22}$$

где R_0 есть $R(0)$ в начальном сечении пучка.

Можно численно решить (20), (22) и получить законы фокусирования пучка, а из (19) - амплитуду волны в облаке.

В случае, если $|\nu\tau'| \ll 1$, т.е. на небольших относительных участках с учетом малости диссипации, можно в (20) отбросить второе слагаемое правой части и проинтегрировать указанное уравнение. Оно будет иметь вид [3], [5]

$$f^2(\tau') = \frac{M}{F^2 + M} + \left(F^2 + M\right)\left[\tau' + F(F^2 + M)^{-1}\right]^2. \tag{23}$$

Интересно отметить, что $M > 0$ ($M < 0$) соответствует дефокусировке (фокусировке) пучка, причем слагаемое $æ_2 b^4$ в (21) за счет нелинейной диссипации приводит к самофокусировке.

Можно также учесть, следуя [2], влияние переменного радиуса капель на пороговые значения частот или зависимость от него плотности водяного пара, что не отражается на развиваемой здесь методике.

Уравнения (17), (18) недостаточно точно учитывают роль дисперсии и коэффициента ν, которые для небольших α должны быть учтены путем сравнения с линейным дисперсионным соотношением [6], для рассматриваемой задачи имеющим вид [1]

$$\Omega^2 - c^2k^2 = \frac{i\chi k^2 \nu_1}{\Omega + i\sigma_1}, \quad \chi = 4\pi L r_1(\gamma - 1) n_0 D m^{-1}, \quad \sigma_1 = 4\pi r_1 D n_0, \tag{24}$$

где решение пропорционально $\exp(ikx - i\Omega t)$. Сравнивая последнее с (16), получим

$$\Omega = \alpha + \omega, \quad k = \frac{\alpha}{c} + i\frac{\nu}{c}.$$

С учетом того, что $\omega, \nu \ll \alpha$, из (24) получим

$$\begin{gathered}
f_1\left(\frac{\alpha}{c}\right) = \omega = \frac{1}{2}\chi\alpha\sigma_1\nu_1 c^{-2}(\alpha^2 + \sigma_1^2)^{-1}, \\
\nu = \nu_2 + \alpha^2 æ c_V^{-1} c^{-2} \gamma^{-1}(\gamma - 1) = -f_2\left(\frac{\alpha}{c}\right). \\
\nu_2 = -\frac{1}{2}\chi\alpha^2\nu_1 c^{-2}(\alpha^2 + \sigma_1^2)^{-1}, \\
æ_1 + iæ_2 = \frac{(\gamma + 1)^2\alpha^3}{32c^2\rho_0^2} \frac{e^{-2\nu\tau^1}}{f_1(\frac{\alpha}{c}) - \frac{1}{2}f_1(\frac{2\alpha}{c}) + if_2(\frac{\alpha}{c}) - \frac{1}{2}if_2(\frac{2\alpha}{c})},
\end{gathered} \tag{25}$$

причем в ν учтена диссипация, обусловленная теплопроводностью (18), а в $æ_{1,2}$ следует заменить ν_0 на ν_2.

Таким образом, равенства (16)-(23) имеют место и для уточненной согласно [1] среды с учетом того, что α является небольшой величиной, и результаты, получаемые из эволюционного уравнения (14), выведенного для больших α, должны быть уточнены.

Значения ω, ν берутся не из (18), а из (25). При этом дисперсия дается не заведомо малой величиной (18) (в силу малости τ_0), а значительно большей величиной (25), диссипация зависит от частоты, как и в [1]. Указанный метод сшивания результатов, полученных из эволюционного уравнения (14), с линейным дисперсионным соотношением (24) является общим и удобным.

Институт механики НАН РА

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա.Գ. Բագդոև, Ա.Վ. Շեկոյան

Ոչ գծային ձայնային փնջերի տարածումը եռաֆազ ամպային միջավայրում

Ուսումնասիրվում է ոչ գծային ալիքների տարածումը օդ, գոլորշի և ջրային կաթիլներ ունեցող միջավայրում: Արտածվել են էվոլյուցիոն և ոչ գծային հավասարումները և գտնված է նեղ փնջերի լուծումը:

Литература

1. *Немцов Б.Е.* - ДАН СССР. 1990. Т. 314 N 2. С. 355-358.

2. *Нетреба С.Н.* - Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т.33. N 3. 412-413.

3. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* - Акустический журнал. 1999. Т. 45. N 2. С. 149-156.

4. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2000. Т. 35. N 2. С. 85-89.

5. *Bagdoev A.G., Shekoyan A.V.* - Conversion Potential of Armenia and ISTC International Seminar. Proceedings. Part I. Yerevan. 2000. P. 102-105.

6. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В., Даноян З.Н.* - Изв. НАН Армении. Физика. 1997. Т. 32. N 6. С. 13-22.