

В.Н. Акопян

Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин

(Представлено академиком Б.Л. Абрамяном 1/VI 2001)

Рассматривается напряженное состояние составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой трещин, на одном из берегов которых заданы компоненты напряжения, а на другом - компоненты смещения. Выведены определяющие уравнения, описывающие поставленную задачу, в виде системы двух сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Гильберта и построено ее замкнутое решение.

Пусть упругая составная плоскость, состоящая из двух полуплоскостей с различными модулями сдвига μ_1, μ_2 и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 , на линии стыка полуплоскостей ослаблена периодической, с периодом $2l$, системой трещин длиной $2a$, на верхнем берегу которых заданы напряжения $\sigma_1(x) - i\tau_1(x)$, а на нижнем - компоненты смещения $u_2(x) + iv_2(x)$ и главный вектор действующих там напряжений $\sigma_2 - i\tau_2$.

Для определенности, как и выше, все величины, описывающие напряженно-деформированное состояние верхней и нижней полуплоскостей, снабдим верхними индексами 1 и 2 соответственно. Из-за периодичности поставленной задачи будем рассматривать напряженное состояние составной бесконечной полосы шириной $2l$, которая на линии стыка двух полубесконечных полос, занимающих области $D_{\pm} = \{-l \leq x \leq l; 0 \leq \pm y < \infty\}$, ослаблена центральной трещиной длиной $2a$, на верхнем берегу которой заданы компоненты напряжения, а на нижнем - компоненты смещения. При этом на граничных линиях полос $x = \pm l$ будут иметь место условия симметрии. Тогда поставленную задачу для компонентов смещения $u^{(j)}(x,y), v^{(j)}(x,y)$ ($j = 1,2$), удовлетворяющих уравнениям Ляме в соответствующих областях $D_{\pm}$, и

компонентов напряжений $\sigma_y^{(j)}(x,y), \tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ ($j = 1,2$), связанных со смещениями законом Гука, математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0); \\
 \text{б) } & u^{(1)}(x,0) + iv^{(1)}(x,0) = u^{(2)}(x,0) + iv^{(2)}(x,0) \quad (l > |x| > a); \\
 \text{в) } & \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \sigma_1(x) - i\tau_1(x); \\
 \text{г) } & u^{(2)}(x,0) + iv^{(2)}(x,0) = u_2(x) + iv_2(x) \quad (|x| < a); \\
 \text{д) } & \tau_{xy}^{(1)}(\pm l, y) = u^{(1)}(\pm l, y) = 0 \quad (0 < y < \infty); \\
 \text{е) } & \tau_{xy}^{(2)}(\pm l, y) = v^{(2)}(\pm l, y) = 0 \quad (-\infty < y < 0).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы построить решение этой смешанной граничной задачи, введем в рассмотрение функции $\chi(x)$ и $w(x)$, описывающие скачок напряжений, действующих на берегах трещины, и приведенное раскрытие трещины, определяемые формулами

$$\begin{aligned} [\sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0)] - [\sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0)] &= \chi(x); \\ [u^{(1)}(x,0) + iv^{(1)}(x,0)] - [u^{(2)}(x,0) + iv^{(2)}(x,0)] &= w(x)/\theta_2^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Сначала решим вспомогательную задачу, аналогичную (1), с той лишь разницей, что условия (1в) и (1г) заменены условиями (2), и определим компоненты напряжения верхнего берега трещины и компоненты смещения нижнего берега трещины при помощи функций $\chi(x)$ и $w(x)$. С этой целью используем бигармонические функции напряжения для областей $D_{\pm}$ и представим их в виде рядов:

$$F_j(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(j)} - (-1)^j \alpha_k y B_k^{(j)}] \exp [(-1)^{j+1} \alpha_k y] \cos \alpha_k x, \quad (3)$$

где $\alpha_k = \pi k/l$, а $A_k^{(j)}$, $B_k^{(j)}$ ($j = 1,2$; $k = 1, 2, \dots$) - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Легко проверить, что при таком выборе функций $F_j(x,y)$ ($j = 1,2$) последние четыре условия (1) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя остальным условиям вспомогательной задачи и определив коэффициенты $A_k^{(j)}$, $B_k^{(j)}$ ($j = 1,2$) через функции $\chi(x)$ и $w(x)$, удовлетворим условиям (1в) и (1г). Тогда после некоторых преобразований для определения функций $\chi(x)$ и $w(x)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядром Гильберта:

$$\begin{aligned} w'(x) + \frac{a_1 i}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} w'(s) ds + \frac{a_2 i}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \chi(s) ds &= F_1(x); \\ \chi(x) - \frac{b_1 i}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} w'(s) ds + \frac{b_2 i}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \chi(s) ds &= F_2(x), \end{aligned} \quad (4)$$

которую нужно рассматривать при условиях

$$\int_{-a}^a \chi(x) dx = T_0; \quad w(\pm a) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что здесь и в дальнейшем будут сохранены обозначения работы [1].

Приступим к решению системы (4). Система (4) почти точно совпадает с системой (4) из [1], с той лишь разницей, что вместо ядра Коши здесь фигурирует ядро Гильберта. Следовательно, как и в [1], решение этой системы можно свести к решению отдельных интегральных уравнений с ядром Гильберта в случае, когда уравнение (2.2) из [1] имеет два различных корня, и последовательному решению двух интегральных уравнений в случае двух одинаковых корней.

В случае, когда уравнение (2.2) из [1] имеет два различных корня λ_1 и λ_2 , отличных от нуля, умножая первое из уравнений (4) поочередно на λ_1 и λ_2 и складывая со вторым, получим следующие два независимых интегральных уравнения:

$$\varphi_j(x) + \frac{iq_j}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \varphi_j(s) ds = Q_j(x) \quad (j = 1, 2; |x| < a). \quad (6)$$

При этом функции $\varphi_j(x) = \chi(x) + \lambda_j w'(x)$ должны удовлетворять также условиям

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = T_0 \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

Чтобы построить решение уравнений (6), перейдем к новым переменным по формулам

$$\tau = \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2l}; \quad t = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2l}$$

и введем обозначения

$$\alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2l}; \quad A_j = \frac{iq_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau \varphi_j^*(\tau)}{1 + \tau^2} d\tau;$$

$$\varphi_j^*(t) = \varphi_j \left(\frac{2l}{\pi} \operatorname{arctg} t \right); \quad Q_j^*(t) = Q_j \left(\frac{2l}{\pi} \operatorname{arctg} t \right).$$

Тогда уравнения (6) и условия (7) примут вид:

$$\varphi_j^*(t) + \frac{iq_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j^*(\tau) d\tau}{\tau - t} = Q_j^*(t) + A_j; \quad \int_{-a}^a \frac{\varphi_j^*(\tau)}{1 + \tau^2} d\tau = \frac{\pi T_0}{2l} \quad (j = 1, 2; |t| < a).$$

Решая полученные уравнения [2,3] и возвращаясь к исходным неизвестным, для функций $\chi(x)$ и $w'(x)$ в случае, когда верхние берега трещин свободны от напряжений, а на нижних берегах действуют абсолютно жесткие штампы с плоскими основаниями ($u_2(x) = 0$, $v_2(x) = \text{const}$), получим формулы

$$\chi(x) = -\frac{iT_0}{2l(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\frac{\pi a}{2l}}[\lambda_2\omega_1(x) - \lambda_1\omega_2(x)]; \quad (8)$$

$$w'(x) = \frac{iT_0}{2l(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\frac{\pi a}{2l}}[\omega_1(x) - \omega_2(x)]. \quad (9)$$

При этом разрушающие напряжения $\sigma_{xy}^{\pm}(x,0) - i\tau_{xy}^{\pm}(x,0)$, действующие вне трещины, даются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{\pm}(x,0) - i\tau_{xy}^{\pm}(x,0) &= \frac{T_0 \operatorname{sgn} x}{\Delta(\lambda_2 - \lambda_1)2l \cos\frac{\pi a}{2l}} \sum_{j=1}^2 \frac{q_j(\lambda_j l_2 - l_3)(-1)^j}{\sqrt{1-q_j^2} \sin(\pi\gamma_j)} \times \\ &\times \frac{G_0^{(j)} \cos\frac{\pi x}{2l} + iG_1^{(j)} \sin\frac{\pi x}{2l}}{\left| \sin\frac{\pi(x+a)}{2l} \right|^{\gamma_j} \left| \sin\frac{\pi(x-a)}{2l} \right|^{1-\gamma_j}} + E_1 \quad (a < |x| < l). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_j(x) &= \frac{q_j}{\sqrt{1-q_j^2}} \frac{G_0^{(j)} \cos\frac{\pi x}{2l} + iG_1^{(j)} \sin\frac{\pi x}{2l}}{\left[\sin\frac{\pi(a+x)}{2l} \right]^{\gamma_j} \left[\sin\frac{\pi(a-x)}{2l} \right]^{1-\gamma_j}} \\ G_m^{(j)} &= \frac{1}{2} [(i + \alpha)^{-\gamma_j} (i - \alpha)^{\gamma_j-1} + (-1)^m (i + \alpha)^{\gamma_j-1} (i - \alpha)^{-\gamma_j}], \quad (m = 0,1; j = 1,2); \\ E_I &= \frac{1}{\Delta(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\frac{\lambda_2 l_2 - l_3}{q_1} v_1^* d_1^* + \frac{l_3 - \lambda_1 l_2}{q_2} v_2^* d_2^* + \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j (\lambda_j l_2 - l_3) \sqrt{g_j} d_j^*}{\sin(\pi\gamma_j)} \right]; \\ v_j^* &= \frac{(1 + q_j)iG_1^{(j)}}{G_0^{(j)} + i\alpha(1 - 2\gamma_j)G_1^{(j)}}; \quad d_j^* = \frac{q_j T_0}{2l(1 + q_j) [G_1^{(j)} a_1^{(j)} - iG_0^{(j)} a_0^{(j)}]} \quad (j = 1,2). \end{aligned}$$

Отметим, что при получении этих формул было использовано значение интеграла

$$\int_{-a}^a \frac{\tau^m(\alpha + \tau)^{\gamma_j}(\alpha - \tau)^{\gamma_j-1}}{1 + \tau^2} d\tau = -(-i)^{m+1} \frac{\pi(1 + q_j)}{q_j e^{i\pi(\gamma_j-1)}} G_m^{(j)} \quad (m = 0,1; j = 1,2).$$

Из полученных выражений легко определить коэффициенты интенсивности в точках $x = \pm a$. Если материалы полуплоскостей таковы, что $\operatorname{Re} \gamma_1 > \operatorname{Re} \gamma_2$, то будем иметь

$$K_I [(-a)^j] - iK_{II} [(-a)^j] = - \frac{(-1)^j \sqrt{2\pi}}{2l \Delta \cos \frac{\pi \alpha}{2l}} \frac{q_j (\lambda_j^2 - 1)}{\sqrt{1 - q_j^2} \sin(\pi \gamma_j)} \times$$

$$\times \left[G_0^{(j)} \cos \frac{\pi a}{2l} + i(-1)^j \sin \frac{\pi a}{2l} \right] \quad (j = 1, 2). \quad (11)$$

Теперь рассмотрим случай, когда материалы полуплоскостей таковы, что уравнение (2.2) из [3] имеет два одинаковых корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = (a_1 - b_2)/2a_2$. Тогда по процедуре, приведенной в работе [1], решая поочередно два интегральных уравнения, получим замкнутое решение поставленной задачи. Не останавливаясь на этом, опять-таки приведем решение задачи в случае, когда верхние берега трещин свободны от напряжений, а на нижних берегах действуют абсолютно жесткие штампы с плоскими основаниями. Оно имеет вид:

$$w'(x) = -\sqrt{g_1} \cos \frac{\pi a}{2l} \left[e_1 \cos \frac{\pi x}{2l} + e_2 \sin \frac{\pi x}{2l} + \left(a^{(1)} \cos \frac{\pi x}{2l} + a^{(2)} \sin \frac{\pi x}{2l} \right) \times \right.$$

$$\times \ln \left[\frac{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l}}{\sin \frac{\pi(a+x)}{2l}} \right] \left. \times \frac{\left(\frac{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l}}{\sin \frac{\pi(a+x)}{2l}} \right)}{\sqrt{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l} \sin \frac{\pi(a+x)}{2l}}} \right] \quad (-a < x < a); \quad (12)$$

$$\chi(x) = -\sqrt{g_1} \cos \frac{\pi a}{2l} \left[b^{(1)} \cos \frac{\pi x}{2l} + b^{(2)} \sin \frac{\pi x}{2l} - \lambda_1 \left(a^{(1)} \cos \frac{\pi x}{2l} + a^{(2)} \sin \frac{\pi x}{2l} \right) \times \right.$$

$$\times \ln \left[\frac{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l}}{\sin \frac{\pi(a+x)}{2l}} \right] \left. \frac{\left(\frac{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l}}{\sin \frac{\pi(a+x)}{2l}} \right)}{\sqrt{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l} \sin \frac{\pi(a+x)}{2l}}} \right] \quad (-a < x < a). \quad (13)$$

Разрушающие контактные напряжения $\sigma_y^\pm(x, 0) - i\tau_{xy}^\pm(x, 0)$, действующие вне трещины, в этом случае имеют вид

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{\pi \sqrt{g_1} \cos \frac{\pi a}{2l}}{\operatorname{ch}(\pi \beta)} \left[c^{(1)} \cos \frac{\pi x}{2l} + c^{(2)} \sin \frac{\pi x}{2l} \right. \quad (14)$$

$$+ \left(e^{(1)} \cos \frac{\pi x}{2l} + e^{(2)} \sin \frac{\pi x}{2l} \right) \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l}}{\sin \frac{\pi(a+x)}{2l}} \right| \frac{\operatorname{sgn} x \left| \frac{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l}}{\sin \frac{\pi(a+x)}{2l}} \right|^{-i\beta}}{\sqrt{\sin \frac{\pi(a-x)}{2l} \sin \frac{\pi(a+x)}{2l}}} + A_0.$$

где $a^{(j)}$, $b^{(j)}$, $c^{(j)}$, e_j , $e^{(j)}$, A_0 , g_1 ($j = 1, 2$) - известные постоянные, значения которых здесь не приводятся.

Из (14) можно заключить, что в рассматриваемом случае контактные напряжения в концевых точках трещины помимо степенной особенности имеют также логарифмическую особенность.

Институт механики НАН РА

Литература

1. *Акопян В.Н.* - Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. С.57-65.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука. 1966. 708 с.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М. Наука. 1977. 640 с.

Վ.Ն. Հակոբյան

Խառը խնդիր ճաքերի պարբերական համակարգով թուլացված բաղադրյալ հարթության համար

Ուսումնասիրված է երկու տարբեր կիսահարթություններից կազմված բաղադրյալ հարթության լարվածադեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն կիսահարթությունների միացման գծի երկայնքով թուլացված է վերջավոր ճաքերի պարբերական համակարգով, որոնց ափերից մեկի վրա տրված են տեղափոխությունները, իսկ մյուսի վրա՝ լարումների բաղադրիչները:

Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպված է Հիլբերտի կորիզով երկրորդ սեռի երկու սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով և կառուցված է այդ համակարգի փակ լուծումը:

Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ ճաքերի ծայրակետերում լարումներն ունեն աստիճանային եզակիություն: Սակայն կիսահարթությունների առաձգական հաստատունների որոշակի արժեքների դեպքում բացի աստիճանային եզակիությունից առաջանում է նաև լոգարիթմական եզակիություն: