УДК 517. 57

К. Л. Аветисян

О дробном интегродифференцировании в классах гармонических функций на полупространстве со смешанной нормой

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 30/VIII 2001)

1. Пусть $\mathbf{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство, и пусть $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $dx = dx_1 \dots dx_n$. Обозначим через $\mathbf{R}^{n+1}_+$ верхнее полупространство пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, т.е. $\mathbf{R}^{n+1}_+ = \mathbf{R}^n \times (0, \infty)$. Точки этого полупространства будем представлять как $(x,y) = (x_1,..., x_n, y)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y > 0$. Иногда удобно будет обозначать $x_0 = y$.

Для измеримой в $\mathbf{R}^{n+1}_+$ функции $f(x,y)$ положим

$$M_p(f; y) = \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\, dx)}, \qquad y > 0, \quad 0 < p \le \infty.$$

Пространство Харди $h^p(\mathbf{R}^{n+1}_+)$ в верхнем полупространстве $\mathbf{R}^{n+1}_+$ состоит из всех (комплекснозначных) гармонических функций $u(x,y)$ в $\mathbf{R}^{n+1}_+$, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{y>0} M_p(u;y) < +\infty.$$

Введем в рассмотрение следующее квазинормированное пространство $L(p,q,\alpha)$ $(0 < p,\ q \le \infty,\ \alpha > 0)$ со смешанной нормой, состоящее из тех измеримых в $\mathbf{R}^{n+1}_+$ функций $f(x,y)$, для которых конечна квазинорма (норма при $1 \le p,q \le \infty$)

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha q-1} M_p^q(f; y)\, dy \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{y>0}\ y^{\alpha} M_p(f; y), & q = \infty. \end{cases}$$

Через $h(p,q,\alpha)$ обозначим гармоническое подпространство в $L(p,q,\alpha)$. Вопрос о дробном интегродифференцировании в пространствах со смешанной нормой был поднят Харди и Литтлвудом [1], [2] и может быть сформулирован следующим образом: как ограниченно действует оператор дробного интегродифференцирования в пространствах $h(p,q,\alpha)$? Этот вопрос детально изучался Флеттом [3], [4], особенно для голоморфных функций в единичном круге (см. также работу автора [5], в которой были дополнены результаты Флетта). В полупространстве $\mathbf{R}^{n+1}_+$ тема дробного интегродифференцирования изучалась в гораздо меньшей степени. Отметим работы М. Тейблсона [6], Т. Флетта [7], Буй Хюи Ки [8], А. Э. Джрбашяна [9].

2. Для функции f(x,y), измеримой и комплекснозначной в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, введем в рассмотрение оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля (называемый также потенциалом Рисса):

$$D^{-\alpha}f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(x,y+\sigma)d\sigma,$$

$$D^0 f = f, \quad D^{\alpha}f(x,y) = (-1)^m D^{-(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y),$$

где $\alpha > 0$, а m- целое, $m - 1 < \alpha \le m$. Если T - ограниченный оператор, отображающий пространство X в Y, т.е. $\|Tf\|_Y \le C\|f\|_X$, $\forall f \in X$, то будем писать $T : X \to Y$. Нижеследующая теорема описывает действие оператора дробного дифференцирования в классах Харди h^p. Ее доказательство следует из одного неравенства типа Литтлвуда-Пэли (см. [10]).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $2 \le q \le \infty$ *и* $1 < p \le q \le \infty$. *Тогда*

$$D^{\alpha} : h^p \to h(p,q,\alpha),$$

$$D^{\alpha} : h^p \to h(p_0,q,\alpha + n/p - n/p_0), \quad 1 < p < p_0 \le \infty.$$

Действие дробного оператора $D^{-\alpha}$ в пространствах $h(p,q,\alpha)$ описано в следующей таблице.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p,q \le \infty$, $\alpha > 0$ - *произвольные числа. Тогда*

$$D^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \to h(p,q,\alpha - \beta), \quad -\infty < \beta < \alpha,\ 0 < p,q \le \infty,$$

$$D^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \to h^p, \quad \beta = \alpha,\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \le \min\{2,p\},$$

$$D^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \to h^{p_0}, \quad \alpha < \beta < \alpha + n/p,\ 0 < p < \infty,\ q \le p_0,$$

$$D^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \to h(p_0,q_0), \quad \alpha < \beta < \alpha + n/p,\ 1 \le p < \infty,$$

$$0 < q \le q_0 \le \infty,\ 1 < q_0 \le \infty,$$

$$D^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \to B, \quad \beta = \alpha + n/p,\ p = \infty,\ 0 < q \le \infty,$$

$$D^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \to BMOh, \quad \beta = \alpha + n/p,\ 0 < p < \infty,\ 0 < q \le \infty,$$

$$D^{-\beta} : h(p,q,\alpha) \to h^{\infty}, \quad \beta = \alpha + n/p,\ 0 < p \le \infty,\ 0 < q \le 1,$$

где $p_0 = [n/(\alpha + n/p - \beta)]$; $h(p,q)$ *обозначает гармоническое пространство Лоренца (см. [11], [8]); B - гармоническое пространство Блоха; BMOh - пространство гармонических в* $\mathbf{R}_+^{n+1}$ *функций с граничными значениями из BMO(**R**^{n}).*

Для функции u(x,y), гармонической в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ и удовлетворяющей условию

$$u(x,y) = O\left(\frac{1}{y^{\delta}}\right), \quad y \to +\infty, \quad \delta > 0,$$

преобразования Рисса определяются как

$$u_j(x,y) = (R_j u)(x,y) = -\int_y^{+\infty} \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial x_j}\, d\eta, \qquad 1 \le j \le n.$$

Вектор-функция $F = (u_0, u_1, ..., u_n)$, $u = u_0$, является системой Рисса сопряженных гармонических функций (см., например, [11]), т.е. функции u_j удовлетворяют обобщенным уравнениям Коши-Римана [11]

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \qquad 0 \le j,k \le n. \tag{1}$$

Эти уравнения равносильны существованию гармонической в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ функции f такой, что $F = \nabla f$. Заметим, что в случае n = 1 уравнения (1) переходят в обычные уравнения Коши-Римана. При этом функция $F = u_0 + iu_1$ голоморфна относительно переменной $z = x_1 + ix_0$.

В следующей теореме устанавливается ограниченность оператора гармонического сопряжения (т.е. преобразований Рисса R_j) в пространствах $h(p,q,\alpha)$ при всех допустимых $0 < p,q \le \infty$, и, тем самым, обобщаются аналогичные утверждения из [9], [12].

Теорема 3. *Пусть* $0 < p,\ q \le \infty$, $\alpha > 0$, $u \equiv u_0 \in h(p,q,\alpha)$. *Если* $F = (u_0, u_1,..., u_n)$ *является системой сопряженных гармонических функций, то*

(i) $\|F\|_{p,q,\alpha} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}$.

(ii) *Условие* $y^{\alpha}M_p(u;y) = o(1)$ *при* $y \to +0$ $(y \to +\infty)$ *равносильно условию*

$$y^{\alpha}M_p(F;y) = o(1) \quad \textit{при} \quad y \to +0 \quad (\textit{соотв.} \quad y \to +\infty).$$

В качестве следствия получаем, что преобразования Рисса ограниченны также в пространствах Блоха B.

3. Основная сложность при доказательстве теорем 2 и 3 возникает при малых p. Это объясняется тем, что при $p < (n-1)/n$ функция $|\nabla f|^p$ (где f гармонична) не обязана быть субгармонической, а функция $M_p(f;y)$ - монотонной по $y > 0$. Применяя известное разложение Уитни в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, мы доказываем для $h(p,p,\alpha)$, $0 < p < \infty$ максимальную теорему типа Харди-Литтлвуда, которая позволяет преодолеть указанные трудности.

Теорема 4. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$, $u(x,y) \in h(p,p,\alpha)$. *Тогда максимальная функция*

$$u^*(x,y) = \sup\left\{ |u(\xi,\eta)|;\ |\xi - x|^2 + (\eta - y)^2 \le y^2/4 \right\}, \qquad x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0$$

удовлетворяет неравенству

$$\|u^*\|_{p,p,\alpha} \le C(\alpha,p,n)\|u\|_{p,p,\alpha}.$$

4. В качестве приложений к теоремам 1-3 дадим характеризацию классов h(p,q,α) через интегральные представления с использованием пространств Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ на $\mathbf{R}^n$. Пусть $1 \le p,q \le \infty$, $\alpha > 0$ и f(x) - измеримая функция на $\mathbf{R}^n$. Полунорма Бесова определяется как

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |t|^{-n-\alpha q} \|\Delta_t^k f(x)\|^q_{L^p(dx)}\, dt \right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{|t|>0} |t|^{-\alpha} \|\Delta_t^k f(x)\|_{L^p(dx)}, & q = \infty, \end{cases}$$

где $\Delta_t^1 f(x) = f(x+t) - f(x)$ и $\Delta_t^k f(x) = \Delta_t^1 \Delta_t^{k-1} f(x)$; k - целое число, $k > \alpha$. Существует пригодное для всех q, $0 < q \le \infty$ эквивалентное определение (см. [6])

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}} = \|D^k v\|_{p,q,k-\alpha},$$

где v = v(x,y) - интеграл Пуассона функции f на $\mathbf{R}^{n+1}_+$.

Теорема 5. *Пусть заданы любые числа* $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha > 0$. *Тогда:*
(i) *Пространство* h(p,q,α) *совпадает с множеством функций* u(x,y), *представимых в виде*

$$u(x,y) = \int_{\mathbf{R}^n} D^\beta P(x-t,y)\, \varphi(t)dt, \qquad x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0, \tag{2}$$

где β $(\alpha < \beta < \alpha + n/p)$ - *произвольное, и*

$$\varphi(t) \in \Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha} \bigcap L^1\left(\frac{dt}{1+|t|^n}\right). \tag{3}$$

Вместе с тем, нормы $\|u\|_{p,q,\alpha}$ *и* $\|\varphi\|_{\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}}$ *эквивалентны.*
(ii) *Функция* φ *из (2)-(3) выражается через следующую формулу обращения*

$$\varphi(x) = \lim_{y\to+0} D^{-\beta} u(x,y), \qquad \text{п. в.} \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{4}$$

(iii) *Пространство* h(p,q,α) *совпадает с множеством функций* u(x,y), *представимых в виде (2), где* β $(\alpha < \beta \le \alpha + n/p)$ - *произвольное, и*

$$\varphi(t) \in \Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha} \bigcap \left(\bigcap_{0<\gamma<1} L^1\left(\frac{dt}{1+|t|^{n+\gamma}}\right)\right).$$

Вместе с тем, нормы $\|u\|_{p,q,\alpha}$ и $\|\varphi\|_{\Lambda^{p,q}_{\beta-\alpha}}$ *эквивалентны, и имеет место формула обращения (4).*

Аналогичные представления в случае единичного круга установлены в [5].

Замечание. Связь между пространствами Бесова и весовыми классами A_α^* Неванлинны-Джрбашяна [13], [14] функций, голоморфных в единичном круге, установлена Ф. Шамояном [15], [16].

В заключение приведем более простое интегральное представление для пространства h

$(2,2,\alpha)$.

Теорема 6. *Пространство* $h(2,2,\alpha)$ $(\alpha > 0)$ *совпадает с множеством функций* $u(x,y)$*, представимых в виде*

$$u(x,y) = \int_{\mathbf{R}^n} D^{\alpha} P(x-t,y)\ \varphi(t)\,dt, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad y > 0,$$

где $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R}^n)$. *Кроме того, функция* φ *может быть выведена из следующей формулы обращения*

$$\varphi(x) = \lim_{y \to +0} D^{-\alpha} u(x,y), \qquad \text{п. в.} \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Доказательство следует из равенства $h(2,2,\alpha) = D^{\alpha}(h^2)$ (см. теоремы 1 и 2).

Соответствующее представление для функций, голоморфных в единичном круге, было установлено М.М. Джрбашяном [14].

Ереванский государственный университет
Институт математики НАН РА

Литература

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* - Math. Zeit. 1932. V. 34, p. 403-439.
2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* - Quart. J. Math. (Oxford). 1941. V. 12. p. 221-256.
3. *Flett T. M.* - Proc. London Math. Soc. 1970. V. 20. p. 249-275.
4. *Flett T. M.* - J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 39. p. 125-158.
5. *Аветисян К. Л.* - ДНАН Армении. 1999. Т. 99. N. 4. с. 301-305.
6. *Taibleson M.* - J. Math. Mech. 1964. V. 13. p. 407-479.
7. *Flett T. M.* - Proc. London Math. Soc. 1970. V. 20. p. 749-768.
8. *Bui Huy Qui* - Hiroshima Math. J. 1979. V. 9. p. 245-295.
9. *Джрбашян А. Э.* - Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1987. Т. 22. N. 4. С. 386-398.
10. *Аветисян К. Л.* - ДНАН Армении. 2001. Т. 101. N. 1. С. 20-23.
11. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М. 1973.
12. *Аветисян К. Л.* - ДНАН Армении. 2001. Т. 101. N. 3. С. 211-215.
13. *Джрбашян М. М.* - ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. N. 1. С. 3-9.
14. *Джрбашян М. М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм ССР. 1948. Вып. 2. С. 3-40.
15. *Шамоян Ф. А.* - ДАН АрмССР. 1990. Т. 90. N. 3. С. 99-103.
16. *Шамоян Ф. А.* - Мат. заметки. 1992. Т. 52. N. 1. С. 128-140.

Կ. Լ. Ավետիսյան

Կոտորակային ինտեգրոդիֆերենցման մասին խառը նորմով հարմոնիկ ֆունկցիաների դասերի համար կիսատարածությունում

Հոդվածում բացահայտված է, թե ինչպես է գործում Ռիման-Լիուվիլլի կոտորակային ինտեգրոդիֆերենցման օպերատորը վերին կիսատարածությունում խառը նորմով հարմոնիկ ֆունկցիաների $h(p, q, \alpha)$ կշռային դասերում: Թեորեմ 2-ում բերված արդյունքների մի մասը ընդհանրացնում և լրացնում է Տ.Ֆլետտի հայտնի արդյունքները և տարածում է դրանք $0 < p < 1$ արժեքների վրա: Այդ նպատակով աշխատանքում ստացված է Հարդի-Լիթլվուդի տիպի մաքսիմալ թեորեմ $h(p, q, \alpha)$, $0 < p < \infty$, դասերի համար: Որպես հետևանք հաստատված է հարմոնիկ համալուծման օպերատորի (Ռիսի ձևափոխության) սահմանափակությունը $h(p, q, \alpha)$ դասերում բոլոր $0 < p, q \leq \infty$ համար: Մյուս կողմից, կիրառելով թեորեմներ 1 և 2-ը, ստացված են հետազոտվող $h(p, q, \alpha)$ կշռային դասերի ինտեգրալ պարամետրական ներկայացումներ, որտեղ ինտեգրալը տարածված է տիրույթի եզրով և, բացի այդ, օգտագործված են Բեսովի դասերը: