УДК 517.5

А.Г. Багдасарян

Об обобщенных пространствах типа Никольского - Бесова с неограниченной точностью

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 6/XII 2001)

Хорошо известно, что, изучая пространства следов функций из *H*-пространств Соболева - Лиувилля, мы приходим к *B*-пространствам Никольского - Бесова (см. [1,2]). Эта же особенность возникает при исследовании интерполяционных свойств пар *H*-пространств методом "вещественной" интерполяции (см. [3,4]).

Исследуя отмеченные свойства *H*-пространств, порожденных полными многогранниками, мы ввели (см. [5]) соответствующие пространства $B^s_{p,q}(\mu)$ типа Никольского - Бесова, с функцией $\mu(\xi)$, отвечающей заданному многограннику.

Во всех указанных случаях функция $\mu(\xi)$ стремится к бесконечности при $|\xi| \to \infty$, что позволяет при определении *B*-пространств применять метод покрытия R_n (см. [3-5]).

В настоящей заметке мы определяем *B*-пространства посредством "вещественной" интерполяции соответствующих пар *H*-пространств. Этот подход дает возможность определения пространств $B^s_{p,q}(\mu)$ типа Нокольского - Бесова и для функций $\mu(\xi)$, не стремящихся к бесконечности при $|\xi| \to \infty$.

Будем пользоваться следующими обозначениями: R_n - n-мерное евклидово пространство, *S* - класс Шварца, *F* - оператор преобразования Фурье, *C* - пространство непрерывных функций, $(A_0, A_1)_{\theta,q}$, $[A_0, A_1]_\theta$ - интерполяционные пространства, полученные методами "вещественной" и "комплексной" интерполяции для заданной пары $\{A_0, A_1\}$ (см. [3,4]).

Обозначим через G^+ множество положительных функций $\mu \in C^\infty(R_n)$ таких, что для любого мультииндекса α с компонентами из множества $\{0;1\}$

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \le c\mu(\xi),\ c > 0,\ \xi \in R_n,\ \prod_{i=1}^n \xi_i \ne 0. \tag{1}$$

Определение 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. *Положим*

$$H_p^s(\mu; R_n) \equiv H_p^s(\mu) = \{ f \in S';\ \| f \|_H = \| F^{-1}\{\mu^s F f\} \|_{L_p(R_n)} < \infty\}.$$

Для функций $\mu(\xi)$, *непрерывных в* R_n, *бесконечно дифференцируемых вне координатных осей и удовлетворяющих оценке (1), H-пространства понимаются как пополнение S в определенной выше норме.*

Рассмотрим оператор типа "лифтинга":

$$I_\lambda = F^{-1}\{\lambda F\},\ \lambda \in G^+.$$

Определение 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. *Положим*

$$B^0_{p,q}(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{[1/2],q},$$

$$B^s_{p,q}(\mu) = I_{\mu^s} B^0_{p,q}(\mu) = \{ f \in S'; I_{\mu^s} f \in B^0_{p,q}(\mu)\}.$$

Следующая теорема дает описание интерполяционного пространства, фигурирующего в определении 1.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $\mu \in G^+$. *Тогда*

$$B^0_{p,q}(\mu) = \left\{ f \in S'; \| f \|_B = \left(\int_0^\infty \| F^{-1} \left\{ \frac{t^{1-\theta}\mu^\theta}{\mu + t} F f \right\} \|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \right)^{[1/q]} < \infty \right\}$$

(с обычными видоизменениями при $q = \infty$*).*

Для введенных *H* и *B*-пространств доказываются интерполяционные формулы "вещественной" и "комплексной" интерполяции.

Теорема 2.

а) Пусть $\mu \in G^+$, $-\infty < s_0 \ne s_1 < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = s_0(1-\theta) + s_1\theta$. *Тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(H^{s_0}_p(\mu), H^{s_1}_p)(\mu)\right)_{\theta,q}.$$

б) *Пусть* $\mu \in G^+$, $-\infty < s_0 \ne s_1 < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q, q_0, q_1 \le \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $0 < \theta < 1$. *Тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p,q_1})(\mu)\right)_{\theta,q}.$$

в) *Пусть* $\mu \in G^+$, $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $[1/(q^*)] = [((1-\theta))/(q_0)] + [(\theta)/(q_1)]$. *Тогда*

$$B^s_{p,q^*}(\mu) = \left(B^s_{p,q_0}(\mu), B^s_{p,q_1})(\mu)\right)_{\theta,q^*}.$$

г) *Пусть* $\mu \in G^+$, $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $1 < p_0, p_1 < 0$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $[1/(p^*)] = [((1-\theta))/(p_0)] + [(\theta)/(p_1)]$, $[1/(q^*)] = [((1-\theta))/(q_0)] + [(\theta)/(q_1)]$. *Тогда*

$$B^s_{p^*,q^*}(\mu) = [B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p_1,q_1})(\mu)]_\theta.$$

д) *Пусть* $\mu \in G^+$, $-\infty < s_0 \ne s_1 < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \le q_0, q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. *Тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mu), H^{s_1}_p)(\mu)\right)_{\theta,q}.$$

Следующие теоремы дают описание *B*-пространств с точки зрения теорем вложения разных метрик.

Теорема 3. *Пусть* $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$B^0_{p,1}(\mu) \subset L_p \subset B^0_{p,\infty}(\nu).$$

Теорема 4. *Пусть* $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$. *Для того чтобы имело место вложение* $B^1_{p,q}(\mu) \subset B^1_{p,q}(\nu)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\nu(\xi) \le c\mu(\xi),\ c > 0,\ \xi \in R_n.$$

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\mu \in G^+$, $[1/p] + [1/(p')] = [1/q] + [1/(q')] = 1$. *Для того чтобы имело место вложение* $B^1_{p,q}(\mu) \subset C$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$F^{-1}\frac{1}{\mu} \in B^0_{p',q'}(\mu).$$

В заключение приведем теорему о следах для *H*-пространств, порожденных вполне правильным многогранником.

Определение 3. *Непустой многогранник* **N**, *с вершинами из первого координатного угла называется полным, если начало координат является вершиной* **N** *и* **N** *имеет вершины на каждой оси координат, отличные от начала координат.*

Полный многогранник **N** *называется вполне правильным, если внешние нормали* $(n-1)$-*мерных некоординатных граней* **N** *имеют только положительные координаты.*

Пусть задан вполне правильный многогранник **N** с вершинами $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^M$. Сопоставим многограннику **N** функцию

$$\mu(\xi) = \left(\sum_{j=0}^{M} \xi^{2\alpha^j}\right)^{[1/2]}.$$

Пусть далее вершины многогранника **N** имеют следующие n-тые координаты: $0, m_1, \ldots, m_N$, причем $0 < m_1 < \ldots < m_N$. Тогда функцию $\mu(\xi)$ можно представить в эквивалентной форме

$$\mu(\xi) \sim \left(\mu_0^2(\xi') + \sum_{j=1}^{N} \xi_n^{2m_j} \mu_j^2(\xi')\right)^{[1/2]}, \ \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),$$

где функция $\mu_0(\xi')$ отвечает проекции многогранника **N** на R_{n-1}, а функции $\mu_j(\xi')$ - проекциям на R_{n-1} сечений многогранника **N** гиперплоскостями $\{x \in R_n;\ x_n = m_j\}$, $j = 1, \ldots, N$.

Рассмотрим следующий оператор следа:

$$(T_r f)(\xi') = f(\xi',0),\ f \in S(R_n).$$

Теорема 6. *Пусть* **N** *- вполне правильный многогранник с функцией* $\mu(\xi)$. *Пусть далее* $1 < p < \infty$, $m_1 > [1/p]$, $\lambda = \mu_0^{1-[1/(pm_1)]} \cdot \mu_1^{[1/(pm_1)]}$. *Тогда оператор следа есть ретракция* $H_p^1(\mu; R_n)$ *на* $I_\lambda B^0_{p,p}([(\mu_0)/(\mu_1)]; R_{n-1})$.

Это означает (см. [3,4]), что оператор следа - линейный ограниченный оператор, для которого существует линейный ограниченный оператор продолжения σ такой, что $T_r\sigma = E$.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. Наука. 1977. 455 с.
2. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. Наука. 1975.
3. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М. Мир. 1980. 664 с.
4. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М. Мир. 1980. 264 с.
5. *Багдасарян А.Г.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1988. Т.23. N 4. С. 353-365.

Ա.Գ. Բաղդասարյան

Նիկոլսի - Բեսովի տիպի ընդհանրացված տարածությունների մասին

Հոդվածում մտցվում և հետազոտվում են բազմանդամային աճ ունեցող $\mu(\xi)$ ֆունկցիայով ծնված Նիկոլսի - Բեսովի տիպի $B^{\mu}_{p,q}(\mu)$ տարածությունները: Ընդ որում $\mu(\xi)$ ֆունկցիան կարող է չձգտել անվերջության, երբ $|\xi| \to \infty$: Դա նշանակում է, որ դիտարկվող B-տարածությունները չեն բնութագրվում ծածկույթների մեթոդի միջոցով (ի տարբերություն դասական դեպքին):

B-տարածությունների սահմանման համար մենք օգտագործում ենք «իրական» ինտերպոլյացիայի մեթոդը Սոբոլև - Լիուվիլլի H-տարածությունների համապատասխան զույգերի համար:

Ապացուցվում են ինտերպոլյացիոն պնդումներ, տարբեր մետրիկաների ներդրման թեորեմներ և թեորեմ Սոբոլև - Լիուվիլլի տիպի տարածությունների ֆունկցիաների հետքերի մասին: