ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 101 2001 № 4

MECHANICS

УДК 239.374

S. M. Sargsyan, academician M. A. Zadoyan

On low stress-state of non-homogeneous compound plates

(Submitted 30/IV 2001)

Within the frames of assumption of classical theory of thin plate bending, the problem of low-stress level [1-3] is considered on the edge of contact surface of compound plate, made of non-compressible, non-homogeneous matters, that are hardening according to a power low. These two matters are fully connected along a cylindrical surface, that is perpendicular to the plate middle plane. We assume that the plate is affected to bending by a transversal loading, and the vicinity of the considered edge is free of external loading.

1. **Initial Relations.** Using cylindrical coordinate system, in the vicinity of the rib $r = 0$ of wedge-shaped domains, $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, and $-\beta \leq \theta \leq 0$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, where h is a plate thickness, parameters are marked with indices $i = 1,2$ respectively. On the Fig.l the $z = 0$ plane is shown. It is assumed, that for each matter, between the stress and strain intensities the following power-law relation exists

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m,$$

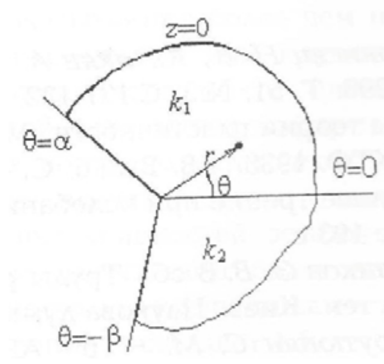

Fig. 1

where $k = k(r, \theta, z)$ is the given spatial coordinate function, that characterises the non-homogeneity of mechanical properties of material and is defined with m out of experiments. It is supposed, that there properties of non-homogeneity are symmetrical relatively to the plate middle plane z = 0. It is also supposed that in the vicinity of $r = 0$ this function expands by its tailor series expansion by powers of r:

$$k = k_0 + rk_1 + r^2 k_2 + \cdots,$$

where $k_i = k_i(\theta, z)$ are the coefficients of this series.

Neglecting σ_z, transversal shear stresses and corresponding shears, and using incompressibility condition $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$, for moments we obtain

$$M_r = D(æ_r + \frac{1}{2}æ_\theta)æ_0^{m-1}, M_\theta = D(æ_\theta + \frac{1}{2}æ_r)æ_0^{m-1}$$
$$M_{r\theta} = \frac{D}{2}æ_{r\theta}æ_0^{m-1}, æ_0 = \sqrt{æ_r^2 + æ_r æ_\theta + æ_\theta^2 + æ_{r\theta}^2}, \tag{1}$$

where $D = D_0(\theta) + rD_1(\theta) + r^2 D_2(\theta) + \ldots,, \; D_n(\theta) = \int\limits_0^h k_n(\theta, \frac{z}{2}) z^{m+1} dz$, n=0,1,2... .

2. Representation of the solution. In each considered domain we look for the plate deflection in the following form

$$w_i = r^{\lambda+1} f_i(\theta, \lambda) \tag{2}$$

where f_i and λ are be-sought functions and parameter, respectively. In the vicinity of $r = 0$, using (2), known strain expressions through curves, and also the curve expressions through deflections, we find

$$M_{ri} = -D_i r^{(\lambda-1)m} (\frac{1}{2} f_i'' + \rho f_i) X_i$$
$$M_{\theta i} = -D_i r^{(\lambda-1)m} (f_i'' + \nu f_i) X_i \tag{3}$$
$$M_{r\theta i} = -\frac{D_i}{2} \lambda r^{(\lambda-1)m} f_i' X_i, \qquad D_i = D_{i0}(\theta)$$

where the following assignments are made

$$X_i = \left(\sqrt{f_i''^2 + 2\nu f_i'' f_i + \lambda^2 f_i'^2 + \Delta^2 f_i^2}\right),$$
$$\rho = (\lambda+1)(\lambda+\frac{1}{2}), \quad \nu = (\lambda+1)(\frac{\lambda}{2}+1), \quad \Delta = (\lambda+1)\sqrt{\lambda^2+\lambda+1}.$$

Putting Eq.(3) into the balance differential equations, expressed through moments and shear forces Q_{ri} and $Q_{\theta i}$, we come to the following fourth order ordinary differential equation:

$$D_i(f_i'' + \nu f_i)X_i]'' + \eta(D_i f_i' X_i)' + D_i(\delta f_i'' + \mu f_i)X_i = 0 \tag{4}$$

where

$$2\delta = (\lambda-1)m[(\lambda-1)m-1], 2\mu = (\lambda-1)m(\lambda^2-1)[1+(2\lambda+1)m], \eta = \lambda[1+(\lambda-1)m].$$

The tangential shear force, that of an interest is determineds out of the corresponding bilance differential equation, that sets relation between $Q_{\theta i}$ and moments

$$Q_{\theta i} = r^{(\lambda-1)m-1}\left\{[D_i(f_i'' + \nu f_i)X_i]' + \lambda\left[1 + \frac{(\lambda-1)m}{2}\right] D_i f_i' X_i\right\}.$$

Corresponding generalised shear force will be

$$V_{\theta i} = Q_{\theta i} - \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial r} = r^{(\lambda-1)m-1}\Big\{[D_i(f_i'' + \nu f_i)X_i]' + \eta D_i f_i' X_i\Big\} \tag{5}$$

For freely supported edges of the plate we have $M_{\theta i} = w_i = 0$ and the boundary condition

$$f_i'' = f_i = 0, \qquad when \qquad \theta = \alpha; -\beta \tag{6}$$

On the contact surface the continuity conditions of deflection, inclination angle of deflection, bending moment and generalised shear force should be considered. On the surface $\theta = 0$ we obtain the following conditions:

$$f_1 = f_2, \;\; f_1' = f_2', \;\; (f_1'' + \nu f_1)X_1 = \gamma(f_2'' + \nu f_2)X_2 \tag{7}$$

$$\Big[D_1(f_1'' + \nu f_1)X_1\Big]' + \eta D_1 f_1' X_1 = \Big[D_2(f_2'' + \nu f_2)X_2\Big]' + \eta D_2 f_2' X_2, \quad \gamma = D_2(0)/D_1(0)$$

The set of differential equations (4) with the boundary-contact conditions (6)-(7) is a three-point eigenvalue problem, that for given values determines λ in dependence of $\alpha, \beta, \gamma, m,$ and the character of non-homogeneity of materials.

Considering the inverse problem, giving values $\lambda = \lambda_* < 1$, we find the dependence between the given parameters. In the coordinate plane $\alpha\beta$ it represents curves of the same degree of moment (stress) concentrations. In the case of linearly-elastic non-homogeneous materials, taking $m = 1$, from Eq.(4) we come to the following linear differential equation with varying coefficients

$$f_i^{IV} + 2\frac{D_i'}{D_i}f_i''' + \Big[2(\lambda^2+1) + \frac{D_i''}{D_i}\Big]f_i'' + \frac{D_i'}{D_i}(2\lambda^2+3\lambda+2)f_i' + \Big[(\lambda^2-1)^2 + (\lambda+1)(\frac{\lambda}{2}+1)\frac{D_i''}{D_i}\Big]f_i = 0$$

that for exponential laws of non-homogeneity brings to an equation of constant coefficients.

3. Defining the areas of low-stress level. Condition $\lambda = 1$ defines hyper surface of finite moments, that leaves tracks on the coordinate plane $\alpha\beta$. This family of finite moment curves, that separate domains of low-stress level from moment (stress) concentration domains in dependence of non-homogeneity parameters. Taking in Eq.(4) $\lambda = 1$ and integrating, we obtain

$$\Big[D_1(f_i'' 3f_i)X_i\Big]' + D_i f_i' X_i = E_i = const, \tag{8}$$

$$where \;\; X_i = \left(\sqrt{f_i''^2 + 6f_i'' f_i + f_i'^2 + 12f_i^2}\right)^{m-1}. \tag{9}$$

Trough differentiation we find

$$\frac{X_i'}{X_i} = -(1-m)\frac{(f_i''' + 4f_i')(f_i'' + 3f_i)}{(f_i'' + 3f_i)^2 + f_i'^2 + 3f_i^2} \tag{10}$$

Using (8) and (5), when $\lambda = 1$, we obtain $V_{\theta i} = E_i/r$. Using contact condition for $V_{\theta i}$, we obtain $E_i = E$. In the case $E \neq 0$, making assignment $f_i = æ/E/^n \psi_i(\theta)$,
$n = 1/m,\;$ æ $= signE$ from Eq.(8), making changes and taking into consideration Eq.(10),
we come to the differential equation

$$\psi_i''' + 4\psi_i + \mu_i(\psi_i'' + 3\psi_i)\frac{(\psi_i'' + 3\psi_i)^2 + \psi_i'^2 + 3\psi_i^2}{m(\psi_i'' + 3\psi_i)^2 + \psi_i'^2 + 3\psi_i^2} = \tag{11}$$

$$= \frac{\left[(\psi_i'' + 3\psi_i)^2) + \psi_i'^2 + 3\psi_i^2\right]^{\frac{3-m}{2}}}{m(\psi_i'' + 3\psi_i)^2 + \psi_i'^2 + 3\psi_i^2},$$

where $\mu_i = D_i'/D_i$. For the case of freely-supported edges we have

$$\psi_i'' = \psi_i = 0, \quad \theta = \alpha, -\beta, \tag{12}$$

$$and\ \psi_1 = \psi_2,\ \psi_1' = \psi_2',\ (\psi_1'' + 3\psi_1)\omega_1 = \gamma(\psi'' + 3\psi_2)\omega_2,\ for\ \theta = 0 \tag{13}$$

Here $\gamma = D_2(0)/D_1(0)$, whereas ω_i is defined according to the expression of X_i in (9), changing there f_i with ψ_i. In the case of exponential laws of non-homogeneity $\mu_i = const$. Taking also $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ and making numerical integration of the system (11), for boundary-contact conditions (12)-(13), on the coordinate plane $\alpha\beta$ the limiting curves of finite moments (stresses), that separate the domains of low-stress state (below curves) from the domains of high moment concentrations (above the curves).

On the given graphs the characters of changing the domains of low-stress level in dependence of non-homogeneity of materials.

The analysis of there curves, in the particular case shows the following:

In the considered problem, if for the continuous homogeneous ($\gamma = 1, \mu_1 = \mu_2 = \mu$) plate with apex angle more than $\pi/2$ we always have stress concentration, and for the apex angle less than $\pi/2$ − absence of concentration, then for continuous non-homogeneous plate, as it is shown on Fig. 2, this regularity breaks. For the compound non-homogeneous plate, when increasing the indicator of non-homogeneity (μ), the area of low-stress level enlarges, and vice versa.

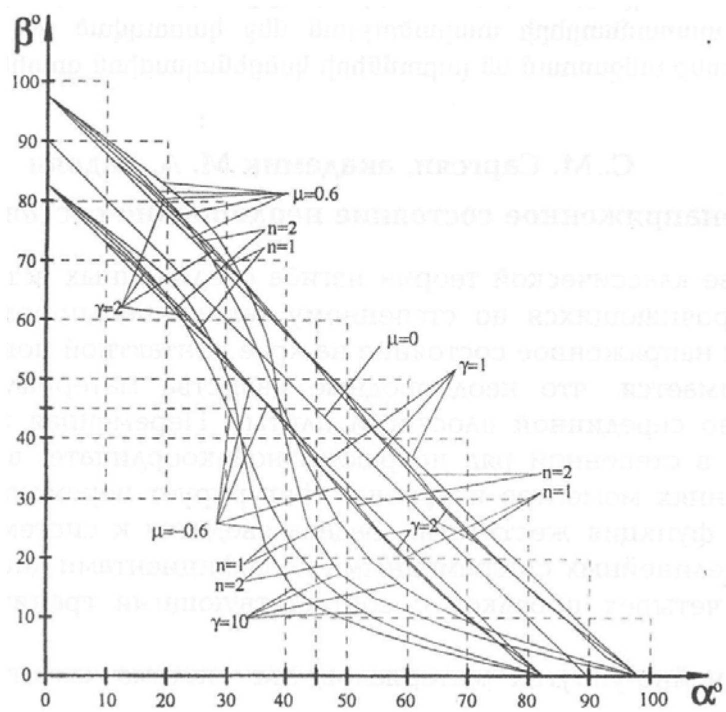

Fig.2

The obtained solutions are accompanied by concentration shear forces in the discussed vicinity, However, as it is explained by authors [4-7], it is connected with inper- fecteness of the plate bending theory, and does not play an important role while estimating the joint strength. It is of great interest the investigation of these problems, taking into consideration transversal shear of plates [8-10].

Institute of Mechanics of NAS RA.

Ս. Մ. Սարգսյան, ակադեմիկոս Մ. Ա. Զադոյան

Անհամասեռ-բաղադրյալ սալերի թերլարվածային վիճակը

Սալերի ծռման դասական տեսության հիման վրա ուսումնասիրվում են ճակատային միացությամբ աստիճանային օրենքով ամրապնդվող և անհամասեռ նյութերից կազմված բաղադրյալ սալերի կոնտակտային մակերևույթի եզրում լարվածային վիճակը:

Ընդունվում է, որ նյութի անհամասեռության հատկությունները սիմետրիկ են սալի միջին հարթության նկատմամբ: Սալի փոփոխական կոշտությունը վերածվում է աստիճանային շարքի՝ ըստ շառավղային կոորդինատի, որի հետևանքով մոմենտների և կորությունների կապերի մեջ հանդես են գալիս բևեռային կոորդինատից կախված կոշտության ֆունկցիան: Խնդիրը բերվում է փոփոխական գործակիցներով 2 չորրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի՝ համապատասխան եզրային-կոնտակտային պայմաններով:

Գծային-առաձգական նյութերի համար այդ համակարգը բերվում է փոփոխական գործակիցներով գծային հավասարումների համակարգի: Մասնավորապես անհամասեռ նյութերի էքսպոնենցիալ օրենքի դեպքում այդ համակարգը բերվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի: Ուսումնասիրվում է ազատ հենված եզրային պայմանների դեպքը, որի համար երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի տարածության մեջ կառուցված են թերլարվածության գոտիները, որոնք անջատում են լարումների կոնցենտրացիոն գոտիներից:

С. М. Саргсян, академик М. А. Задоян

Малонапряженное состояние неоднородно-составных плит

На основе классической теории изгиба соединенных встык разнородных плит из упрочняющихся по степенному закону неоднородных материалов исследуется напряженное состояние на крае контактной поверхности.

Принимается, что неоднородные свойства материала, симметричны относительно серединной плоскости плиты. Переменная жесткость плиты разлагается в степенной ряд по радиальной координате, в конечном счете в соотношениях моментов и кривизн фигурирует переменная по полярной координате функция жесткости. Задача сводится к системе из двух

обыкновенных нелинейных с переменными коэффициентами дифференциальных уравнений четырех порядков с соответствующими гранично-контактными условиями.

Для линейно-упрутих материалов эта система сводится к линейным уравнениям с переменными коэффициентами. В случае экспоненциального закона неоднородности получается система с дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Рассматриваются свободно-опертые граничные условия, для которых в пространстве геометрических и физических параметров построены зоны малонапряженности, отделяющие от зон сильной концентрации напряжений.

Литература

1. *Chobanian K. S.* - Stress in Compound Elastic Bodies. Yerevan, Armenian Academy of Science Publishing House, 1987. 338 p. (in Russian).
2. *Zadoyan M. A.* - Spatial Problems of The Plasticity Theory. M. Nauka. 1992. 384 p. (in Russian).
3. *Zadoyan M. A.* - Russian Academy of Sciences, Docl. AN. 1993. V. 332. No. 3. V. 319-321. (in Russian).
4. *Galyorkin B. G.* - Collection of Works. M. AN SSSR. 1953. V. 2. 438p, (in Russian).
5. *Hartranft R. J., Sih G. S.* - J. Math. Phys. 1968. V. 47, P. 276-291.
6. *Pagano N. J., Sih G. C.* - J. Solids and Structures. 4 (1968), 531 p.
7. *Belubekian E. V.* - DAN ArmSSR. 1969. V. 49. N5, P. 225-232 (in Russian).
8. *Ambartsumian S. A.* - Theory of Anisotropic Plates. M. Nauka. 1987. 360p. (in Russian).
9. *Reissner E.* - Quartely of Appl. Math. 1947. N5, P. 55-68.
10. *Washizu K.* - Variational Methods in Elasticity and Plasticity. M. Mir. 1987. 542 p.