УДК 621.313.322.01

Академик Г.Л. Арешян

Система дифференциальных уравнений автономного синхронного генератора, представленная через потокосцепления

(Представлено 15/V 2001)

Построение решений дифференциальных уравнений автономно работающего синхронного генератора (СГ) при набросе нагрузки в [1] производилось на основе уравнений, записанных через напряжения и токи. С точки зрения объема и скорости вычислений на компьютерах, а также точности расчетов переходных процессов определенным интересом представляет построение решений системы дифференциальных уравнений СГ, записанной через напряжения и потокосцепления, а не через токи. В настоящей статье получена такая система операторных уравнений для приращений потокосцеплений для случая наброса дополнительной нагрузки $Z_2 = pL_2 + r_2$ на автономно работающий с нагрузкой $Z_1 = pL_1 + r_1$ синхронный генератор.

Эту систему получим на основе системы, записанной через напряжения и токи [1]:
для цепей СГ

$$\left. \begin{aligned} -U_d = r_s i_d + \frac{d\Psi_d}{dt} + \omega_0 \Psi_q; \quad -U_q = r_s i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} - \omega_0 \Psi_d; \\ U_f = r_f i_f + \frac{d\Psi_f}{dt}; \quad 0 = r_D i_D + \frac{d\Psi_D}{dt}; \quad 0 = r_Q i_Q + \frac{d\Psi_Q}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для цепей нагрузки Z_1 и Z_2

$$\left. \begin{aligned} U_d = r_1 i_{d1} + \frac{d\Psi_{d1}}{dt} + \omega_0 \Psi_{q1}; \quad U_q = r_1 i_{q1} + \frac{d\Psi_{q1}}{dt} - \omega_0 \Psi_{d1}; \\ U_d = r_2 i_{d2} + \frac{d\Psi_{d2}}{dt} + \omega_0 \Psi_{q2}; \quad U_q = r_2 i_{q2} + \frac{d\Psi_{q2}}{dt} - \omega_0 \Psi_{d2}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где потокосцепления равны

$$\left. \begin{aligned} \Psi_d = L_d i_d + M_d i_f + M_d i_D; \quad \Psi_q = L_q i_q + M_q i_Q; \\ \Psi_f = L_f i_f + M_d i_d + M_d i_D; \quad \Psi_D = L_D i_D + M_d i_d + M_d i_f; \\ \Psi_Q = L_Q i_Q + M_q i_q; \quad \Psi_{d1} = L_1 i_{d1}; \quad \Psi_{q1} = L_1 i_{q1}; \\ \Psi_{d2} = L_2 i_{d2}; \quad \Psi_{q2} = L_2 i_{q2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На основе (3) получаем

$$\left. \begin{aligned}
i_d &= \frac{\Psi_d}{L_{11}} - \frac{\Psi_f}{L_{21}} - \frac{\Psi_D}{L_{31}}; & i_f &= -\frac{\Psi_d}{L_{12}} + \frac{\Psi_f}{L_{22}} - \frac{\Psi_D}{L_{32}}; \\
i_D &= -\frac{\Psi_d}{L_{13}} - \frac{\Psi_f}{L_{23}} + \frac{\Psi_D}{L_{33}}; & i_q &= \frac{\Psi_q}{L_{44}} - \frac{\Psi_Q}{L_{54}}; & i_Q &= -\frac{\Psi_q}{L_{45}} + \frac{\Psi_Q}{L_{55}}; \\
i_{d1} &= \frac{\Psi_{d1}}{L_1}; & i_{q1} &= \frac{\Psi_{q1}}{L_1}; & i_{d2} &= \frac{\Psi_{d2}}{L_2}; & i_{q2} &= \frac{\Psi_{q2}}{L_2},
\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned}
L_{11} &= \frac{D}{A_{11}}; & L_{21} &= \frac{D}{A_{21}}; & L_{31} &= \frac{D}{A_{31}}; & L_{12} &= \frac{D}{A_{12}}; & L_{22} &= \frac{D}{A_{22}}; \\
L_{32} &= \frac{D}{A_{32}}; & L_{13} &= \frac{D}{A_{13}}; & L_{23} &= \frac{D}{A_{23}}; & L_{33} &= \frac{D}{A_{33}};
\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$D = L_d L_f L_D + 2M_d^3 - L_f M_d^2 - L_D M_d^2 - L_d M_d^2 \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned}
A_{11} &= L_f L_D \sigma_{fD}; & A_{12} &= L_D M_d \sigma_D; & A_{13} &= L_f M_d \sigma_f; \\
A_{21} &= A_{12}; & A_{22} &= L_d L_D \sigma_{dD}; & A_{23} &= L_d M_d \sigma_d; \\
A_{31} &= A_{13}; & A_{32} &= A_{23}; & A_{33} &= L_d L_f \sigma_{df};
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$L_{44} = \sigma_{qQ} L_q; \quad L_{55} = \sigma_{qQ} L_Q; \quad L_{45} = L_{54} = \sigma_{qQ} L_q L_Q M_q^{-1}. \quad (8)$$

В свою очередь коэффициенты рассеяния равны

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{df} &= 1 - M_d^2 L_d^{-1} L_f^{-1}; & \sigma_{dD} &= 1 - M_d^2 L_d^{-1} L_D^{-1}; & \sigma_{fD} &= 1 - M_d^2 L_f^{-1} L_D^{-1}; \\
\sigma_{qQ} &= 1 - M_q^2 L_q^{-1} L_Q^{-1}; & \sigma_d &= 1 - M_d L_d^{-1}; & \sigma_f &= 1 - M_d L_f^{-1}; & \sigma_D &= 1 - M_d L_D^{-1}.
\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставляя выражения токов по уравнению (4) в системы (1) и (2), получаем основные выражения через потокосцепления:

для генератора

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\Psi_d}{dt} &= -U_d - \omega_{sd} \Psi_d - \omega_0 \Psi_q + \omega_{sf} \Psi_f + \omega_{sD} \Psi_D; \\
\frac{d\Psi_q}{dt} &= -U_q + \omega_0 \Psi_d - \omega_{sq} \Psi_q + \omega_{sQ} \Psi_Q; \\
\frac{d\Psi_f}{dt} &= U_f + \omega_{fd} \Psi_d - \omega_{ff} \Psi_f + \omega_{fD} \Psi_D; \\
\frac{d\Psi_D}{dt} &= \omega_{Dd} \Psi_d + \omega_{Df} \Psi_f - \omega_{DD} \Psi_D; \\
\frac{d\Psi_Q}{dt} &= \omega_{Qq} \Psi_q - \omega_{QQ} \Psi_Q;
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

для нагрузки Z_1

$$\frac{d\Psi_{d1}}{dt} = U_d - \omega_1 \Psi_{d1} - \omega_0 \Psi_{q1}; \quad \frac{d\Psi_{q1}}{dt} = U_q + \omega_0 \Psi_{d1} - \omega_2 \Psi_{q1}; \quad (11)$$

для нагрузки Z_2

$$\frac{d\Psi_{d2}}{dt} = U_d - \omega_2 \Psi_{d2} - \omega_0 \Psi_{q2}; \quad \frac{d\Psi_{q2}}{dt} = U_q + \omega_0 \Psi_{d2} - \omega_2 \Psi_{q2}. \quad (12)$$

Частоты, входящие в уравнения, равны

$$\left. \begin{aligned}
\omega_{sd} &= r_s L_{11}^{-1}; & \omega_{sf} &= r_s L_{21}^{-1}; & \omega_{sD} &= r_s L_{31}^{-1}; \\
\omega_{sq} &= r_s L_{44}^{-1}; & \omega_{sQ} &= r_s L_{54}^{-1}; & \omega_{fd} &= r_f L_{12}^{-1}; \\
\omega_{ff} &= r_f L_{22}^{-1}; & \omega_{fD} &= r_f L_{32}^{-1}; & \omega_{Dd} &= r_D L_{13}^{-1}; \\
\omega_{Df} &= r_D L_{23}^{-1}; & \omega_{DD} &= r_D L_{33}^{-1}; & \omega_{Qq} &= r_Q L_{45}^{-1}; \\
\omega_{QQ} &= r_Q L_{55}^{-1}; & \omega_1 &= r_1 L_1^{-1}; & \omega_2 &= r_2 L_2^{-1}.
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Представим систему уравнений (10)-(12) в операторном виде для приращений напряжений и потокосцеплений. Приращения определяем относительно многомерной точки

$$U_d^0, U_q^0, U_f^0, \Psi_d^0, \Psi_q^0, \Psi_f^0, \Psi_D^0, \Psi_Q^0, \Psi_{d1}^0, \Psi_{q1}^0, \Psi_{d2}^0, \Psi_{q2}^0 \quad (14)$$

в виде

$$\left. \begin{aligned} U_j(t) &= U_j^0 + \Delta U_j(t), \quad \Psi_i(t) = \Psi_i^0 + \Delta \Psi_i(t), \\ (j &= d, q, f; \quad i = d, q, f, D, Q, d1, q1, d2, q2). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Обозначив преобразование Лапласа приращений той же буквой (без Δ)

$$L\{\Delta U_j(t)\} = U_j(p); \quad L\{\Delta \Psi_i(t)\} = \Psi_i(p),$$

получаем следующую систему операторных уравнений:
для цепей генератора

$$\left. \begin{aligned} (p + \omega_{sd})\Psi_d + \omega_0\Psi_q - \omega_{sf}\Psi_f - \omega_{sD}\Psi_D &= -U_d + p^{-1}B_d^0; \\ -\omega_0\Psi_d + (p + \omega_{sq})\Psi_q - \omega_{sQ}\Psi_Q &= -U_q + p^{-1}B_q^0; \\ -\omega_{fd}\Psi_d + (p + \omega_{ff})\Psi_f - \omega_{fD}\Psi_D &= U_f + p^{-1}B_f^0; \\ -\omega_{Dd}\Psi_d - \omega_{Df}\Psi_f + (p + \omega_{DD})\Psi_D &= p^{-1}B_D^0; \\ -\omega_{Qq}\Psi_q + (p + \omega_{QQ})\Psi_Q &= p^{-1}B_Q^0; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

для нагрузки Z_1

$$(p + \omega_1)\Psi_{d1} + \omega_0\Psi_{q1} = U_d + p^{-1}B_{d1}^0; \quad -\omega_0\Psi_{d1} + (p + \omega_1)\Psi_{q1} = U_q + p^{-1}B_{q1}^0; \quad (17)$$

для нагрузки Z_2

$$(p + \omega_2)\Psi_{d2} + \omega_0\Psi_{q2} = U_d + p^{-1}B_{d2}^0; \quad -\omega_0\Psi_{d2} + (p + \omega_2)\Psi_{q2} = U_q + p^{-1}B_{q2}^0. \quad (18)$$

Постоянные начальных значений в уравнениях (16)-(18) равны

$$\left. \begin{aligned} B_d^0 &= -U_d^0 - \omega_{sd}\Psi_d^0 - \omega_0\Psi_q^0 + \omega_{sf}\Psi_f^0 + \omega_{sD}\Psi_D^0; \\ B_q^0 &= -U_q^0 + \omega_0\Psi_d^0 - \omega_{sq}\Psi_q^0 + \omega_{sQ}\Psi_Q^0; \\ B_f^0 &= U_f^0 + \omega_{fd}\Psi_d^0 - \omega_{ff}\Psi_f^0 + \omega_{fD}\Psi_D^0; \\ B_D^0 &= \omega_{Dd}\Psi_d^0 + \omega_{Df}\Psi_f^0 - \omega_{DD}\Psi_D^0; \\ B_Q^0 &= \omega_{Qq}\Psi_q^0 - \omega_{QQ}\Psi_Q^0; \\ B_{d1}^0 &= U_d^0 - \omega_1\Psi_{d1}^0 - \omega_0\Psi_{q1}^0; \\ B_{q1}^0 &= U_q^0 + \omega_0\Psi_{d1}^0 - \omega_1\Psi_{q1}^0; \\ B_{d2}^0 &= U_d^0 - \omega_2\Psi_{d2}^0 - \omega_0\Psi_{q2}^0; \\ B_{q2}^0 &= U_q^0 + \omega_0\Psi_{d2}^0 - \omega_2\Psi_{q2}^0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Преобразуем систему (16), исключив вначале Ψ_D и Ψ_Q , а потом Ψ_f .

$$\left. \begin{aligned} \Psi_D &= \frac{\omega_{Dd}}{p+\omega_{DD}} \Psi_d + \frac{\omega_{Df}}{p+\omega_{DD}} \Psi_f + \frac{B_D^0}{p(p+\omega_{DD})}; \\ \Psi_Q &= \frac{\omega_{Qq}}{p+\omega_{QQ}} \Psi_q + \frac{B_Q^0}{p(p+\omega_{QQ})}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подставив эти выражение в уравнение (16), получаем

$$\left. \begin{aligned} (p+\omega'_{sd})\Psi_d + \omega_0\Psi_q - \omega'_{sf}\Psi_f &= -U_d + B'_d; \\ -\omega_0\Psi_d + (p+\omega'_{sq})\Psi_q &= -U_q + B'_q; \\ -\omega'_{fd}\Psi_d + (p+\omega'_{ff})\Psi_f &= U_f + B'_f. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В уравнении (21) одним верхним штрихом обозначены переходные операторные частоты, которые равны

$$\left. \begin{aligned} \omega'_{sd}(p) &= \omega_{sd} - \frac{\omega_{sD}\omega_{Dd}}{p+\omega_{DD}}; & \omega'_{fd}(p) &= \omega_{fd} + \frac{\omega_{fD}\omega_{Dd}}{p+\omega_{DD}}; \\ \omega'_{sf}(p) &= \omega_{sf} + \frac{\omega_{sD}\omega_{Df}}{p+\omega_{DD}}; & \omega'_{ff}(p) &= \omega_{ff} - \frac{\omega_{fD}\omega_{Df}}{p+\omega_{DD}}; \\ \omega'_{sq}(p) &= \omega_{sq} - \frac{\omega_{sQ}\omega_{Qq}}{p+\omega_{QQ}}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Переходные операторные выражения начальных значений в уравнении (21) равны

$$\left. \begin{aligned} B'_d(p) &= \frac{B_d^0}{p} + \frac{\omega_{sD}}{p(p+\omega_{DD})} \cdot B_D^0; & B'_q(p) &= \frac{B_q^0}{p} + \frac{\omega_{sQ}}{p(p+\omega_{QQ})} \cdot B_Q^0; \\ B'_f(p) &= \frac{B_f^0}{p} + \frac{\omega_{fD}}{p(p+\omega_{DD})} \cdot B_D^0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Используя последнее уравнение системы (21), имеем

$$\Psi_f = \frac{\omega_{fd}'}{p + \omega_{ff}'} \Psi_d + \frac{U_f}{p + \omega_{ff}'} + \frac{B_f'}{p + \omega_{ff}'}. \quad (24)$$

Подставляем (24) в первое уравнение системы (21). Получаем совместно со вторым уравнением

$$\left. \begin{aligned} (p + \omega_{sd}'') \Psi_d + \omega_0 \Psi_q &= -U_d + U_f' + B_d''; \\ -\omega_0 \Psi_d + (p + \omega_{sq}') \Psi_q &= -U_q + B_q', \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где сверхпереходная операторная частота равна

$$\omega_{sd}''(p) = \omega_{sd}' - \frac{\omega_{sf}' \omega_{fd}'}{p + \omega_{ff}'}. \quad (26)$$

Сверхпереходное операторное выражение начальных значений равно

$$B_d''(p) = B_d' + \frac{\omega_{sf}'}{p + \omega_{ff}'} \cdot B_f'. \quad (27)$$

Переходное операторное приращение напряжения возбуждения равно

$$U_f'(p) = \frac{\omega_{sf}'}{p + \omega_{ff}'} \cdot U_f(p). \quad (28)$$

При исключении потокосцеплений Ψ_D , Ψ_Q и Ψ_f уравнения для цепей нагрузок не меняются и остаются в виде уравнений (17) и (18).

Для решения системы (17), (18) и (25) необходимо получить еще уравнения, связывающие Ψ_d с Ψ_{d1} и Ψ_{d2} , а также Ψ_q с Ψ_{q1} и Ψ_{q2} .

Когда СГ начинает работать с двумя нагрузками, имеем условия для токов генератора и нагрузок

$$i_d(t) = i_{d1}(t) + i_{d2}(t); \quad i_q(t) = i_{q1}(t) + i_{q2}(t). \quad (29)$$

Записывая эти уравнения через потокосцепления, переходя к приращениям, исключая Ψ_d , Ψ_f Ψ_Q , получаем еще два уравнения:

$$\frac{\Psi_d}{L_{11}''} - \frac{\Psi_{d1}}{L_1} - \frac{\Psi_{d2}}{L_2} = C_d'' + \frac{1}{L_{21}'} \cdot \frac{U_f}{p + \omega_{ff}'}; \quad \frac{\Psi_q}{L_{44}'} - \frac{\Psi_{q1}}{L_1} - \frac{\Psi_2}{L_2} = C_q', \quad (30)$$

где обозначено

$$C_d^0 = -\frac{\Psi_d^0}{L_{11}} + \frac{\Psi_f^0}{L_{21}} + \frac{\Psi_D^0}{L_{31}} + \frac{\Psi_{d1}^0}{L_1} + \frac{\Psi_{d2}^0}{L_2};$$

$$C_q^0 = -\frac{\Psi_q^0}{L_{44}} + \frac{\Psi_Q^0}{L_{54}} + \frac{\Psi_{q1}^0}{L_1} + \frac{\Psi_{q2}^0}{L_2};$$

$$\frac{1}{L_{11}'} = \frac{1}{L_{11}} - \frac{1}{L_{31}} \cdot \frac{\omega_{Dd}}{p + \omega_{DD}};$$

$$\frac{1}{L_{21}'} = \frac{1}{L_{21}} + \frac{1}{L_{31}} \cdot \frac{\omega_{Df}}{p + \omega_{DD}};$$

$$C_d' = \frac{C_d^0}{p} + \frac{1}{L_{31}} \cdot \frac{B_D^0}{p(p + \omega_{DD})};$$

$$\frac{1}{L_{11}''} = \frac{1}{L_{11}'} - \frac{1}{L_{21}'} \cdot \frac{\omega_{fd}'}{p + \omega_{ff}'};$$

$$C_d'' = C_d' + \frac{1}{L_{21}'} \cdot \frac{B_f'}{p + \omega_{ff}'};$$

$$\frac{1}{L_{44}'} = \frac{1}{L_{44}} - \frac{1}{L_{54}} \cdot \frac{\omega_{Qq}}{p + \omega_{QQ}};$$

$$C_q'' = \frac{C_q^0}{p} + \frac{1}{L_{54}} \cdot \frac{B_Q^0}{p + \omega_{QQ}}.$$

Полная система дифференциальных уравнений автономного синхронного генератора, работающего с нагрузками, записанная через приращения потокосцеплений в операторной форме, дается уравнениями: для цепей СГ уравнение (25), для цепей нагрузки $Z_1 = pL_1 + r_1$ уравнения (17), для цепей подключаемой нагрузки $Z_2 = pL_2 + r_2$ уравнения (18), для условий по токам уравнение (30).

Система содержит восемь независимых уравнений для восьми переменных

$$U_d; U_q; \Psi_d; \Psi_q; \Psi_{d1}; \Psi_{q1}; \Psi_{d2}; \Psi_{q2}. \quad (31)$$

Остальные три переменные Ψ_f, Ψ_D, Ψ_Q определяются на основании уравнений (20) и (21) после того, как становятся известными Ψ_d и Ψ_q . Величина форсировки $U_f(p)$ должна быть задана. Окончательные выражения для определения переменных уравнения (31) были получены решением матричных уравнений и здесь не приводятся. В заключение отметим, что такая система, полученная впервые, представляет теоретический интерес и используется для аналитических расчетов переходных процессов в СГ при набросе нагрузки.

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. Арешян Г. Л. - Электричество. 1998. N10.

Ակադեմիկոս Գ.Լ.Արեշյան

Ավտոնոմ սինխրոն գեներատորի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը՝ արտահայտված հոսքակցումների միջոցով

Ստացված է բեռնավորված ավտոնոմ աշխատող սինխրոն գեներատորի հոսքակցումների աճերի համար գծայնացված գործարկու հավասարումների համակարգը լրացական բեռը միացնելու դեպքում:

Քննարկվել է դեմպֆերային վանդակներով սինխրոն գեներատորը գրգռման ուժեղացման դեպքում: 11 փոփոխական պարունակող համակարգը վերածվել է 8 փոփոխական պարունակող համակարգի Ψ_f , Ψ_D , Ψ_Q հոսքակցումների հաջորդական բացառումով:

Ստացված բանաձևերը ունեն որոշակի հետաքրքրություն սինխրոն գեներատորների տեսության համար: