

А. М. Ишханян

Решение поляритонной задачи для плавной границы

(Представлено академиком Р. А. Казаряном 12/II 2001)

Поверхностные поляритоны определяются как локализованные электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль границ раздела различных сред [1,2]. Классическим примером является плазмонный поляритон, возникающий на границе раздела металл-диэлектрик [1]. Другими важными примерами являются экситонный [2], магнонный [3] и фононный [4] поляритоны. С точки зрения физики конденсированных сред поверхностные волны обусловлены динамикой соответствующих квазичастиц - плазмонов, экситонов, магнонов, фононов и т. д. Однако с точки зрения электродинамики сплошных сред, когда длина волны и расстояние распада волны много больше, чем межатомные расстояния, подобные локализованные волны могут быть рассмотрены феноменологически, макроскопическими уравнениями Максвелла, через соответствующие диэлектрические постоянные среды.

В согласии со сказанным под поляритонной задачей в широком смысле понимается вопрос о существовании локализованных решений уравнений Максвелла для различных видов пространственных вариаций (комплексных) тензоров (диэлектрической и/или магнитной) проницаемостей [2].

Под термином "граница" при этом следует понимать двумерные области пространства - поверхности, в окрестности которых происходит существенное изменение упомянутых тензоров.

В случае линейных сред (когда $D=\epsilon E$, $B=\mu H$ и $j=\sigma E$), свободных от сторонних зарядов, макроскопические уравнения Максвелла для периодических во времени процессов сводятся к следующей симметричной относительно перестановки пар (ϵ, E) и (μ, H) системе двух связанных уравнений [5]:

$$\Delta E + \text{grad} \left(\frac{\nabla \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} E \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\epsilon} E = - \frac{\nabla \mu}{\mu} \times \text{rot} E, \quad (1)$$

$$\Delta H + \text{grad} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} H \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\epsilon} H = - \frac{\nabla \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} \times \text{rot} H, \quad (2)$$

где комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\epsilon}$ определяется как $\tilde{\epsilon} = \epsilon - i[(4\pi\sigma)/(\omega)]$.

Следует подчеркнуть, что если только одна из проницаемостей испытывает пространственную вариацию, то, как легко заметить, во-первых, система (1), (2) расщепляется, т. е. одно из полей E , H может быть определено независимо, а во-вторых, указанная симметрия относительно перестановки $(\tilde{\epsilon}, E) \leftrightarrow (\mu, H)$ нарушается.

Эти очевидные наблюдения влекут за собой фундаментальную разницу в поведении волн с различной поляризацией. Математически это выражается в том, что в указанных условиях уравнения для ТЕ и ТМ мод существенно отличаются.

Например, если среда локально изотропна и $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(z')$, $\mu = \text{const}$, то уравнение для ТМ электромагнитной волны будет содержать дополнительный член, пропорциональный логарифмической производной диэлектрической проницаемости:

$$\text{TE мода, } \vec{E} = (0, E_y, 0): \quad \Delta E_y + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\epsilon} E_y = 0, \quad (3)$$

$$\text{TM мода, } \vec{H} = (0, H_y, 0): \quad \Delta H_y - \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial z'} \frac{\partial H_y}{\partial z'} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\epsilon} H_y = 0. \quad (4)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, наличие этого члена, как нетрудно установить, действительно способно привести в задачу дополнительную сингулярность в областях, где $\tilde{\epsilon}(z')$ пересекает ноль. Именно благодаря этой сингулярности становится возможным существование волн, локализованных в окрестности одной-единственной границы, т. е. существование поляритонов!

Ввиду сингулярности указанного члена, обычным подходом в теории поляритонов (и, вообще, ТМ или смешанных волноводных мод) является приближение резкой границы (бесконечно тонкого переходного слоя), когда второй член в уравнении (4) отбрасывается, а его учет проводится лишь косвенно, через граничные условия.

Заметим, что при отбрасывании этого члена уравнение (4) становится идентичным уравнению (3), которое сводится к виду, аналогичному одномерному стационарному уравнению Шредингера. Для последнего, как известно, существует хорошо развитый аппарат специальных функций, опирающийся на гипергеометрический тип уравнений, имеющих не более трех особых точек. При сохранении же члена $\sim \partial (\ln \tilde{\epsilon}) / \partial z'$ естественно ожидать либо увеличения числа особых точек, либо увеличения ранга сингулярности этих точек. Теория подобных уравнений до последнего времени была развита чрезвычайно слабо. Единственными уравнениями, теория которых благодаря интенсивным усилиям, предпринятым в последнее десятилетие, в настоящий момент доведена до достаточного для практики уровня, являются пять уравнений класса Гойна (см. [6] и многочисленные ссылки там). Это наблюдение вселяет надежду добиться успеха при трактовке поляритонной задачи для плавной границы через функции Гойна.

В настоящей работе мы впервые предпринимая подобную попытку. Мы проводим математически строгий учет сингулярного члена непосредственно в уравнении (4) для модельного профиля вариации диэлектрической проницаемости по закону гиперболического тангенса.

Как мы убедимся, задача при этом сводится к каноническому виду общего уравнения Гойна, имеющему четыре простые особые точки. Мы строим решение исходной задачи в виде степенного ряда, а также приближенное решение через неполные бета-функции. Далее мы выводим приближенное дисперсионное соотношение для поляритона, имеющее правильную асимптотику в пределе резкой границы.

Рассмотрим решения уравнения (4) для ТМ моды, представляющие собой волны, бегущие вдоль границы, скажем, в направлении x-координаты: $H_y = H(z') e^{ik_x x}$. Уравнение $H(z')$ при этом примет вид

$$H_{z'z'} - \frac{U_{z'}}{U} H_{z'} + (\lambda - U) H = 0. \quad (5)$$

(здесь и далее буквенный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной), где для унификации записи введены обозначения

$$\lambda = -k_x^2, \quad U = -\frac{\omega^2}{c^2} \mu \tilde{\varepsilon}(z). \quad (6)$$

Следуя методу [7], преобразуем уравнение (5), сохранив его линейность, заменой зависимой и независимой переменных:

$$H = \varphi(z)u(z), \quad z' = \int \frac{dz}{\rho(z)}. \quad (7)$$

В результате получаем уравнение

$$u_{zz} = \left[2 \frac{\varphi_z}{\varphi} + \frac{\rho_z}{\rho} - \frac{U_z}{U} \right] u_z + \left[\frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + \frac{\varphi_z}{\varphi} \left(\frac{\rho_z}{\rho} - \frac{U_z}{U} \right) + \frac{\lambda - U}{\rho^2} \right] u = 0. \quad (8)$$

Потребуем, чтобы данное уравнение совпадало с канонической формой общего уравнения Гойна [6]:

$$u_{zz} + \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{-\delta}{1-z} - \frac{\varepsilon}{z-\alpha} \right] u_z + \frac{-\alpha\beta z + q}{z(1-z)(z-\alpha)} u = 0, \quad (9)$$

где $1 + \alpha + \beta = \gamma + \delta + \varepsilon$.

Для этого, очевидно, должно быть:

$$2 \frac{\varphi_z}{\varphi} + \frac{\rho_z}{\rho} - \frac{U_z}{U} = \frac{\gamma}{z} + \frac{-\delta}{1-z} - \frac{\varepsilon}{z-\alpha}, \quad (10)$$

$$\left[\frac{\varphi_z}{\varphi} \right]_z + \frac{\varphi_z}{\varphi} \left[\frac{\varphi_z}{\varphi} + \frac{\rho_z}{\rho} - \frac{U_z}{U} \right] + \frac{\lambda - U}{\rho^2} = \frac{-\alpha\beta z + q}{z(1-z)(z-\alpha)} u. \quad (11)$$

Анализ структуры этих уравнений показывает, что следует искать величины ρ , φ и U в следующем виде:

$$\varphi = z^\alpha {}_1(1-z)^{-\alpha} {}_2(z-\alpha)^\alpha {}_3, \quad (12)$$

$$\rho = \frac{1}{\tau} z^{n_1} (1-z)^{n_2} (z-\alpha)^{n_3}, \quad (13)$$

$$U = U_0 z^{k_1} (1 - z)^{k_2} (z - \alpha)^{k_3}, \quad (14)$$

где τ и U_0 - произвольные постоянные.

Тогда из уравнения (10) однозначно определяются параметры γ , δ , ε :

$$\gamma = 2\alpha_1 + n_1 - k_1, \quad \delta = -2\alpha_2 + n_2 - k_2, \quad \varepsilon = 2\alpha_3 + n_3 - k_3 \quad (15)$$

Наличие же независимого внешнего параметра λ (спектральный параметр) в уравнении (11) вынуждает наложить на ρ и U дополнительные связи:

$$\frac{\lambda \tau^2}{\rho^2} \sim \frac{p_1}{z^2} + \frac{p_2}{(1-z)^2} + \frac{p_3}{(z-\alpha)^2} + \frac{q_1}{z(1-z)} + \frac{q_2}{z(z-\alpha)} + \frac{q_3}{(1-z)(z-\alpha)}, \quad (16)$$

$$U = z^{2n_1} (1-z)^{2n_2} (z-\alpha)^{2n_3} \times \left(\frac{U_1}{z^2} + \frac{U_2}{(1-z)^2} + \frac{U_3}{(z-\alpha)^2} + \frac{V_1}{z(1-z)} + \frac{V_2}{z(z-\alpha)} + \frac{V_3}{(1-z)(z-\alpha)} \right). \quad (17)$$

Тогда соответственно определяются параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, q , α , β :

$$\begin{aligned} \alpha_1(\alpha_1 + n_1 - k_1 - 1) + (\lambda p_1 - U_1)\tau^2 &= 0, \\ \alpha_2(\alpha_2 + n_2 - k_2 + 1) + (\lambda p_2 - U_2)\tau^2 &= 0, \\ \alpha_3(\alpha_3 + n_3 - k_3 - 1) + (\lambda p_3 - U_3)\tau^2 &= 0, \\ q &= -\alpha[\alpha_1(\alpha_2 - n_2 - k_2) + \alpha_2(\alpha_1 + n_1 - k_1) + (\lambda p_1 - V_1)\tau^2] + \\ &+ [\alpha_1(\alpha_3 + n_3 - k_3) + \alpha_3(\alpha_1 + n_1 - k_1) + (\lambda q_2 - V_2)\tau^2], \\ -\alpha\beta &= [\alpha_1(\alpha_2 - n_2 - k_2) + \alpha_2(\alpha_1 + n_1 - k_1) + (\lambda q_1 - V_1)\tau^2] - \\ &- [\alpha_1(\alpha_3 + n_3 - k_3) + \alpha_3(\alpha_1 + n_1 - k_1) + (\lambda q_2 - V_2)\tau^2] + \\ &+ [\alpha_2(\alpha_3 + n_3 - k_3) + \alpha_3(\alpha_2 + n_2 - k_2) + (\lambda q_3 - V_3)\tau^2]. \end{aligned} \quad (18)$$

Нетрудно увидеть, что дополнительные связи (16), (17) и уравнения (12), (13), (14) совместны лишь при определенных n_1, n_2, n_3 и k_1, k_2, k_3 . Среди допустимых наборов значений этих параметров оказываются лишь единичные, которые приводят к физически интересным видам профилей диэлектрической проницаемости. В первую очередь таковыми являются наборы $(n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 0)$ и $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 1)$.

Как нетрудно проверить, тогда получается

$$U = U_1 + (U_2 - U_1)z, \quad (19)$$

$$z = \frac{1}{1 + e^{-(z' - z'_0)/\tau}}. \quad (20)$$

Преобразование (20) отображает действительную ось z' на отрезок $z \in [0, 1]$. При этом профиль диэлектрической проницаемости определяет скачок по закону гиперболического тангенса:

$$\tilde{\varepsilon} \equiv -\frac{c^2}{\omega^2 \mu} U = -\frac{c^2}{\omega^2 \mu} \left(\frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} + \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{z' - z'_0}{2\tau} \right). \quad (21)$$

Как видим, ширина переходного слоя определяется параметром τ . Параметры задачи теперь явно определяются спектральным параметром следующим образом:

$$\gamma = 1 + 2\alpha_1, \quad \delta = 1 - 2\alpha_2, \quad \varepsilon = -1, \quad (23)$$

$$\alpha = \beta = \alpha_1 - \alpha_2, \quad q = \alpha[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)] - \alpha_1. \quad (24)$$

Решение уравнения Гойна (9) можно построить в виде степенного ряда:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (25)$$

Для коэффициентов ряда получается трехчленное рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} & a_n n[\alpha(n-1) + \alpha\gamma] - a_{n-1} [1 + a)(n-1)(n-2) + (\gamma(1+a) + a\delta + \\ & + \varepsilon)(n-1) + q] + a_{n-2} [(n-2)(n-3) + (\gamma + \delta + \varepsilon)(n-2) + \alpha\beta] = 0, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$a_{-2} = a_{-1} = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = q/a\gamma,$$

анализ которого показывает, что для $|\alpha| < 1$ ряд (25) сходится, вообще говоря, только на отрезке $z \in [0, |\alpha|]$.

Решение же на отрезке $z \in [|\alpha|, 1]$ можно построить аналитическим продолжением, произведя замену $z \rightarrow 1 - z$. Согласно теории Пуанкаре-Перрона относительно расширенной сходимости [6], существует значение спектрального параметра λ , при котором ряд (25) сходится всюду на отрезке $z \in [0, 1]$. Это значение находится из следующего соотношения, заданного в виде бесконечной дроби:

$$\tilde{Q}_1 = \frac{R_1 P_2}{Q_2 +} \frac{R_2 P_3}{Q_3 +} \frac{R_3 P_4}{Q_4 +} \dots, \quad (27)$$

где R_n , $\tilde{Q}_n$, P_n - суть коэффициенты рекуррентного соотношения (26) при a_n , a_{n-1} и a_{n-2} соответственно. Однако можно строго показать, что, к сожалению, данное значение λ не представляет собой собственное значение, так как решение, соответствующее этому значению, не ограничено при $z=1$.

Однако можно указать простое приближенное решение исходной задачи, справедливое при малых толщинах переходного слоя. Это решение нетрудно получить, если заметить, что параметры q и $\alpha\beta$ в уравнении Гойна (9) квадратично малы по τ . Тогда, переходя к нормальной форме уравнения (9), можно убедиться, что последний член уравнения Гойна мал и, следовательно, может быть отброшен. В этом случае решение уравнения (9) выписывается в замкнутом виде, через неполные бета-функции:

$$u = C_1 [B_z(1-2\alpha_1, 2\alpha_2) - a B_z(-2\alpha_1, 2\alpha_2)] + C_2, \quad (28)$$

где должно быть выбрано $\text{Re}[\alpha_1] < 0$, $\text{Re}[\alpha_2] > 0$.

Для удовлетворения граничного условия $u(z=0)=0$ полагаем $C_2=0$. Значение же $u(z)$ при $z=1$ выражается через гамма-функции:

$$u(1) = C_1 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} - a \right) \frac{\Gamma(-2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)}{\Gamma(2(\alpha_2 - \alpha_1))}. \quad (29)$$

Следовательно, для достижения последнего граничного условия $u(z=1)=0$ должно быть

$$(1-a)\alpha_1 + a\alpha_2 = 0. \quad (30)$$

Как нетрудно убедиться, последнее условие приводит к формуле для волнового числа поляритона, справедливой в пределе бесконечно тонкого переходного слоя:

$$k_x^2 = \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (31)$$

Таким образом, мы показали, что задача о поляритоне для плавной границы с профилем диэлектрической проницаемости, изменяющимся по закону гиперболического тангенса, сводится к каноническому виду общего уравнения Гойна, имеющему четыре простые особые точки. Мы вывели дисперсионное соотношение для волнового числа поляритона и показали, что оно имеет правильную асимптотику в пределе резкой границы, т. е. когда переходный слой считается бесконечно тонким.

Примечательно, что ряд других профилей также может быть изучен с помощью уравнения Гойна. В частности, один из подобных профилей описывает трехслойную структуру, представляющую большой практический интерес [1,2].

Работа была выполнена при поддержке грантов ISTC No. A-215, RA No. 98-740 и Армянского национального фонда науки и образования (ANSEF).

Инженерный центр НАН Армении

Литература

1. *Raether H.* Surface Plasmons. Berlin. Springer-Verlag. 1998; Maradudin A. A. In: Surface Polaritons. Edited by V. M. Agranovich and D. L. Mills, N. Y. North-Holland. 1982; Yang F., Sambles J. R., Bradberry G. W. - Phys. Rev. B. 1991. V. 44. P. 5855.
2. *Yang F., Sambles J. R., Bradberry G. W.* - Phys. Rev. Lett, V. 64, 559 (1990); A. Brillante, Pockrand I., Philpott M. R., Swalen J. D. - Chem. Phys. Lett. 1978. V. 57. P. 395.
3. *Hickernell R. K., Sarid D.* - Opt. Lett. 1987. V. 12. P. 570.
4. *Brion J. J., Wallis R. F., Harststein A., Burstein E.* - Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 1455. Brion J. J., Wallis R. F., Harststein A., Burstein E. - Surf. Sci., 1973. V. 34, P. 73 ; Chiu K. W., Quinn J. J., - Phys. Rev. B. 1972. V. 5. P. 4707. Lenac Z., Tomas M. S. - J. Phys. C. 1983. V. 16. P. 4273.
5. *Колесников П. М.* Введение в нелинейную электродинамику: Минск. Наука и техника. 1971.
6. *Ronveaux A.*, Heun's Differential Equations. London, Oxford University Press. 1995.
7. *Ishkhanyan A. M.* - J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 450; *Ishkhanyan A. M.* - Optics Communications, 2000. V. 176. P. 155. *Ishkhanyan A. M.* - J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 5539.

Ա. Մ. Իշխանյան

Պոլյարիտոնային խնդրի լուծում անընդհատ սահմանի համար

Ուսումնասիրված է մակերևութային պոլյարիտոնի խնդիրը երկու կիսաանսահման միջավայրի բաժանման ոչ կտրուկ սահմանի համար, երբ դիէլեկտրական թափանցելիությունը փոխվում է հիպերբոլական տանգենսի օրենքով: Ցույց է տրված, որ տվյալ խնդրի լուծումն արտահայտվում է Հոյնի ֆունկցիաներով: Կառուցված է Հոյնի հավասարման լուծումը աստիճանային շարքի տեսքով: Պոլյարիտոնի ալիքային թվի համար դուրս է բերված դիսպերսիոն հավասարում, որն անսահման բարակ անցումային շերտի հայտնի սահմանում ունի ճիշտ ասիմպտոտ: