ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 101 2001 № 2

ФИЗИКА

УДК 467

Академик Д. М. Седракян, А. Ж. Хачатрян, Г. М. Андреасян

К задаче рассеяния электрона в поле неоднородного потенциала с различными фиксированными значениями в бесконечностях

(Представлено 19/III 2001)

Рассмотрим движение электрона в поле потенциала

$$U(x) = \begin{cases} V_1 = \text{const}\ , & x < 0, \\ V(x), & 0 < x < d, \\ V_2 = \text{const}\ , & x > d, \end{cases} \tag{1}$$

где $V(x)$ произвольная функция и, в общем случае, значения V_1, V_2 различны.

Задача определения амплитуды отражения $R_{1,2}$ и амплитуды прохождения $T_{1,2}$ для потенциала $V(x)(1)$ сводится к задаче определения амплитуд отражения R и прохождения T для потенциала $V(x)$ (для $U(x)$, когда значения V_1 и V_2 равны нулю);

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_{1,2}}=&\frac{\exp\{ik_2d\}}{4k_2k_0}\left[\frac{(k_2-k_0)(k_0-k_1)}{T^*}\exp\{ik_0d\}+\frac{(k_2+k_0)(k_0+k_1)}{T}\exp\{-ik_0d\}+\right.\\&\left.+\frac{(k_0+k_2)(k_1-k_0)R}{T}\exp\{-ik_0d\}+\frac{(k_0-k_2)(k_0+k_1)R^*}{T^*}\exp\{ik_0d\}\right],\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{R_{1,2}}{T_{1,2}}=&\frac{\exp\{ik_0d\}}{4k_1k_0}\left[\frac{(k_0-k_2)(k_0+k_1)}{T^*}\exp\{ik_0d\}+\frac{(k_1-k_0)(k_0+k_2)}{T}\exp\{-ik_0d\}+\right.\\&\left.+\frac{(k_0+k_2)(k_0+k_1)R}{T}\exp\{-ik_0d\}+\frac{(k_2-k_0)(k_0-k_1)R^*}{T^*}\exp\{ik_0d\}\right],\end{aligned} \tag{3}$$

где $k_0=\sqrt{2mE/\hbar^2},\ k_1=\sqrt{2m(E-V_1)/\hbar^2},\ k_2=\sqrt{2m(E-V_2)/\hbar^2}.$

Соотношения (2), (3) являются алгебраическими связями между амплитудами рассеяния электрона для потенциалов $V(x)$ и $U(x)$ и справедливы для любого потенциала вида (1). Задача определения амплитуд рассеяния электрона R и T для потенциала произвольного вида $V(x)$, граничащего с обеих сторон с вакуумом, была рассмотрена в работах [1, 2]. Как было показано в этих работах, задача определения R и T, в общем виде, может быть сведена к задаче Коши для однородной системы из двух линейных дифференциальных уравнений. Обозначая через $T \equiv T(y)$ и $R \equiv R(y)$, для функций $T(y)$ и $R(y)$ можно записать

$$\frac{d}{dy}\frac{1}{T(y)} = \frac{iV(y)}{2k_0}\frac{1}{T(y)} - \frac{iV(y)}{2k_0}\exp\{2ik_0y\}\frac{R^*(y)}{T^*(y)}\ , \tag{4}$$

$$\frac{d}{dy}\frac{R^*(y)}{T^*(y)} = \frac{iV(y)}{2k_0}\frac{R^*(y)}{T^*(y)} + \frac{iV(y)}{2k_0}\exp\{-2ik_0y\}\frac{1}{T(y)} \tag{5}$$

с начальными условиями

$$T(0) = 1 \ \text{ и } \ R(0) = 0\ . \tag{6}$$

Как видно, система уравнений (5), (6) относительно функций $1/T(y)$ и $R^*(y)/T^*(y)$ является линейной.

В данной работе мы приводим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют непосредственно амплитуды рассеяния $R_{1,2}$ и $T_{1,2}$ электрона для потенциала $U(x)(1)$.

Рассмотрим в (2), (3) $R_{1,2}$ и $T_{1,2}$ как функции от переменной y, т. е. введем функции $R_{1,2}(y)$ и $T_{1,2}(y)$. Тогда для функций $R_{1,2}(y)$ и $T_{1,2}(y)$ из (2), (3) и (4), (5) можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{dy}\frac{1}{T_{1,2}(y)} = i\frac{V(y)-V_2}{2k_2}\left[\frac{1}{T_{1,2}(y)} - \exp\{2ik_2y\}\frac{R^*_{1,2}(y)}{T^*_{1,2}(y)}\right]\ , \tag{7}$$

$$\frac{d}{dy}\frac{R^*_{1,2}(y)}{T^*_{1,2}(y)} = -i\frac{V(y)-V_2}{2k_2}\left[\frac{R^*_{1,2}(y)}{T^*_{1,2}(y)} + \exp\{-2ik_2y\}\frac{1}{T(y)}\right] \tag{8}$$

с начальными условиями

$$T_{1,2}(0) = 2k_1(k_1+k_2) \ \text{ и } \ R_{1,2}(0) = (k_1-k_2)/(k_1+k_2)\ . \tag{9}$$

Заметим, что относительно функций $1/T_{1,2}(y)$ и $R^*_{1,2}(y)/T^*_{1,2}(y)$ полученная система дифференциальных уравнений (7), (8) является линейной. Замена $k_1 = k_2 = k$ в (7), (8) на $k \to k_0$ и $V(y)$ на $V_2 \to V(y)$ переводит систему (7), (8) в систему уравнений (4), (5). Последнее означает простой сдвиг начала отсчета энергии.

Как мы покажем ниже, задача определения амплитуд рассеяния электрона $R_{1,2}(y)$ и $T_{1,2}(y)$ может быть сформулирована так же как задача Коши непосредственно для стационарного волнового уравнения Шредингера. Для этого поступим аналогично методу, развитому в работе [1] для потенциала, граничащего с обеих сторон с вакуумом. Введем следующие функции:

$$L(y) = \frac{\exp\{-ik_2 y\}}{T_{1,2}(y)} - \frac{R^*_{1,2}(y)\exp\{ik_2 y\}}{T^*_{1,2}(y)} , \tag{10}$$

$$F(y) = \frac{\exp\{-ik_2 y\}}{T_{1,2}(y)} + \frac{R^*_{1,2}(y)\exp\{ik_2 y\}}{T^*_{1,2}(y)} . \tag{11}$$

Используя (7)-(9), можно показать, что функции $L(y)$ и $F(y)$ должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + (E - V(y))\right] L(y) = 0 \ \text{ и } \ F(y) = \frac{i}{k_2}\frac{dL}{dy} \tag{12}$$

с начальными условиями

$$L(0) = k_2 \,/\, k_1 \quad \text{и} \quad dL \,/\, dy\,|_{y=0} = -ik_2 . \tag{13}$$

Как видно из (12), функция $L(y)$ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера. Далее будем искать функцию $L(y)$ в виде

$$L(y) = \frac{k_2}{k_1} H_1(y) - ik_2 H_2(y) . \tag{14}$$

Тогда, используя (14) и (10)-(12), амплитуду рассеяния $T_{1,2}$ и $R_{1,2}$ можно выразить через ɥзункции $H_1(y)$ и $H_2(y)$ с помощью следующих формул:

$$\frac{1}{T_{1,2}} = \frac{\exp\{ik_2 d\}}{2}\left[\frac{k_2}{k_1}H_1 + \frac{dH_2}{dy} - ik_2 H_2 + \frac{i}{k_1}\frac{dH_1}{dy}\right] , \tag{15}$$

$$\frac{R_{1,2}}{T_{1,2}} = \frac{\exp\{ik_2 d\}}{2}\left[-\frac{k_2}{k_1}H_1 + \frac{dH_2}{dy} - ik_2 H_2 - \frac{i}{k_1}\frac{dH_1}{dy}\right] . \tag{16}$$

Заметим, что в (15), (16) $H_{1,2}$ и $dH_{1,2}/dy$ являются значениями функций $H_1(y)$, $H_2(y)$ и их производных в точке $y = d$.

Вследствие линейной связи (14) функции $H_1(y)$ и $H_2(y)$, как и функция $L(y)$, будут удовлетворять стационарному уравнению Шредингера:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + (E - V(y))\right] H_{1,2}(y) = 0 \tag{17}$$

с начальными условиями

$$H_1(0) = 1, \ \ H_2(0) = 0 \quad \text{и} \quad dH_1 \,/\, dy\,|_{y=0} = 0, \quad dH_2 \,/\, dy\,|_{y=0} = 1 . \tag{18}$$

Как следует из вышеизложенного, задача определения амплитуд отражения и прохождения электрона для произвольного нерегулярного потенциала, находящегося между двумя однородными полубесконечными средами, сводится к задаче Коши для уравнения Шредингера. Интересно применение полученного результата (15)-(18) для простого случая, когда потенциал слоя однороден ($V(y) = V = const$ для $0 < y < d$). Тогда, решая (17), (18) для функций $H_1(y)$ и $H_2(y)$, имеем

$$H_1(y) = \cos\{k_0\, y\} \quad \text{и} \quad H_2(y) = \sin\{k_0\, y\} \,/\, k_0 \,. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (15), (16), получим амплитуды отражения и прохождения электрона для однородного слоя, помещенного между двумя однородными полубесконечными средами:

$$\frac{1}{T_{1,2}} = \exp\{ik_2 d\} \left\{ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)\cos k_0\, d - i\frac{k_2 k_1 + k_0^2}{2k_1 k_0}\sin k_0\, d \right\}, \tag{24}$$

$$\frac{R_{1,2}}{T_{1,2}} = \exp\{ik_2 d\} \left\{ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)\cos k_0\, d + i\frac{k_0^2 - k_1 k_2}{k_1 k_0}\sin k_0\, d \right\}, \tag{25}$$

Как видно из (24), (25), условие полевого прохождения электрона возможно только в случае, когда потенциалы первой и второй полубесконечных сред равны друг другу, т. е. $V_1 = V_2$. При этом условии электрон с энергиями $k_0 d = \pi n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ проходит слой с вероятностью единица. Последнее соответствует тому, что внутри слоя помещается целое число полуволн $(d = n\lambda/2,$ где λ длина волны де Бройля).

Ереванский государственный университет

Государственный инженерный университет Армении

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Ակադեմիկոս Դ. Մ. Սեդրակյան, Ա. Ժ. Խաչատրյան, Գ. Մ. Աեդրեասյան

Էլեկտոնի ցրման խնդիրը միաչափ կամայական դաշտում,
որն ունի անվերջությունների տարրեր ֆիքսված արժեքներ

Աշխատանքում առաջարկված է մեթոդ համաձայն որի էլեկտրոնի ցրման և անդրադարձման ամպլիտուդների որոշման խնդիրը բերվում է Կոշու խնդրի:

Литература

1. *Седракян Д. М., Хачатрян А. Ж.* - Астрофизика. 1999. Т. 42. № 3. С. 419-426.
2. *Sedrakian D. M., Khachatrian A. Zh.* - Phys. Lett. A. 2000. V. 265. P. 294.