ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 101 2001 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

С. А. Мелкумян, А. Ж. Григорян

О несимметричном вдавливании жесткого штампа в упругую ортотропную полуплоскость, ослабленную внутренним вертикальным конечным разрезом

(Представлено академиком В. С. Саркисяном 26/II 2001)

Рассматривается плоская несимметричная контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости ($z \geq 0$; $|x| < \infty$), ослабленной внутренним вертикальным конечным разрезом ($c < z < d$), когда на конечной длине ($a \leq x \leq b$) горизонтальной границы ($z = 0$) полуплоскости вдавливают жесткий штамп произвольной гладкой формы, расположенный несимметрично относительно оси разреза ($x = 0$).

Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. На границе полуплоскости вне штампа и на кромках разреза действует произвольное нормальное давление.

Решение задачи представлено как сумма решений смешанных задач для двух квадрантов, разделенных осью разреза ($i = 1 -$ для правого квадранта, $i = 2 -$ для левого квадранта).

Задача решается методом Фурье в перемещениях.

Решение представлено в виде сумм интегралов Фурье:

$$U_x^{(i)}(x;z) = \frac{(-1)^{i+1}}{C_{11}} \int_0^\infty \alpha \bar{U}^{(i)}(\alpha;z) \cos\alpha x d\alpha + \frac{(-1)^{i+1}}{C_{11}} \int_0^\infty \beta \bar{U}^{(i)}(\beta;x) \cos\beta z d\beta \;;$$
$$U_z^{(i)}(x;z) = \frac{(-1)^{i}}{C_{44}} \int_0^\infty \alpha \bar{W}^{(i)}(\alpha;z) \sin\alpha x d\alpha + \frac{1}{C_{44}} \int_0^\infty \beta \bar{W}^{(i)}(\beta;x) \sin\beta z d\beta \;; \quad (1)$$

где

$$\begin{Bmatrix} \bar U^{(1)}(\alpha;z) \\ \bar U^{(2)}(\alpha;z) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2} \triangle_1(t_j) \begin{Bmatrix} A_j(\alpha) \\ B_j(\alpha) \end{Bmatrix} e^{-\alpha t_j z} \;;$$
$$\begin{Bmatrix} \bar U^{(1)}(\beta;x) \\ \bar U^{(2)}(\beta;x) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\triangle_1(t_k)}{t_k^2} \begin{Bmatrix} C_k(\beta) \\ D_k(\beta) \end{Bmatrix} e^{(-1)^i \frac{\beta}{t_k} x} \;;$$
$$\begin{Bmatrix} \bar W^{(1)}(\alpha;z) \\ \bar W^{(2)}(\alpha;z) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2} \triangle_2(t_j) \begin{Bmatrix} A_j(\alpha) \\ B_j(\alpha) \end{Bmatrix} e^{-\alpha t_j z} \;; \tag{2}$$
$$\begin{Bmatrix} \bar W^{(1)}(\beta;x) \\ \bar W^{(2)}(\beta;x) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} \triangle_2(t_k) \begin{Bmatrix} C_k(\beta) \\ D_k(\beta) \end{Bmatrix} e^{(-1)^i \frac{\beta}{t_k} x} \;.$$

Определение $\Delta_1(t_j)$ и $\Delta_2(t_j)$ дано в работе [1].

Неизвестные функции интегрирования $A_j(\alpha)$; $B_j(\alpha)$; $C_k(\beta)$; $D_k(\beta)$ определяются, используя граничные условия и условия полного контакта квадрантов:

$$\begin{aligned}
&\sigma_z^{(1)}(x;0) = 0; \quad 0 < x < a; \quad \tau_{zx}^{(1)}(x;0) = 0; \quad 0 < x < \infty \;; \\
&U_z^{(1)}(x;0) = f_1(x); \quad a \le x \le b; \quad \tau_{zx}^{(2)}(x;0) = f_2(x); \quad -\infty < x < 0 \;; \\
&\sigma_z^{(1)}(x;0) = 0; \quad b < x < \infty; \quad \sigma_z^{(2)}(x;0) = f_3(x); \quad -\infty < x < 0 \;; \\
&\sigma_x^{(1)}(0;z) = \sigma_x^{(2)}(0;z); \quad \tau_{xz}^{(1)}(0;z) = \tau_{xz}^{(2)}(0;z); \quad 0 < z < c \;; \\
&U_x^{(1)}(0;z) = U_x^{(2)}(0;z); \quad U_z^{(1)}(0;z) = U_z^{(2)}(0;z); \quad 0 \le z \le c \;; \\
&\sigma_x^{(1)}(0;z) = f_4(z); \quad c < z < d; \quad \sigma_x^{(2)}(0;z) = f_4(z); \quad c < z < d \;; \\
&\tau_x^{(1)} z(0;z) = 0; \quad c < z < d; \quad \tau_x^{(2)} z(0;z) = 0; \quad c < z < d \;; \\
&\sigma_x^{(1)}(0;z) = \sigma_x^{(2)}(0;z); \quad \tau_{xz}^{(1)}(0;z) = \tau_{xz}^{(2)}(0;z); \quad d < z < \infty \;; \\
&U_x^{(1)}(0;z) = U_x^{(2)}(0;z); \quad U_z^{(1)}(0;z) = U_z^{(2)}(0;z); \quad d \le z < \infty \;.
\end{aligned} \tag{3}$$

Пользуясь основными соотношениями теории упругости [2] и (1, 2), можно все компоненты упругого поля выразить через неизвестные функции интегрирования. Удовлетворяя условиям (3), получим следующие интегральные соотношения и “тройные” интегральные уравнения:

$$A_j(\alpha) = a_j A_1(\alpha); \quad B_j(\alpha) = a_j B_1(\alpha) + d_j \varphi_2(\alpha) \;; \tag{4}$$

$$\alpha^2 B_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} a^* \alpha F_1(\alpha) + \bar a \alpha^2 \varphi_2(\alpha) - a^* \alpha^2 \varphi_3(\alpha) \;; \tag{5}$$

$$F_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} t_k^2 \int_0^\infty \frac{\beta^2 D_k(\beta)}{\beta^2 + \alpha^2 t_k^2} d\beta \;; \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{2} b_{3k}[C_k(\beta) - D_k(\beta)] = 0; \quad \sum_{k=1}^{2} b_{1k}[C_k(\beta) + D_k(\beta)] = -\phi(\beta) \;; \tag{7}$$

$$\phi(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \sum_{j=1}^{2} a_{1j} a_j \int_0^\infty \frac{\alpha^2 [A_1(\alpha) + B_1(\alpha)]}{\beta^2 + \alpha^2 t_j^2} d\alpha + \frac{2}{\pi\beta} \varphi_2^*(\beta) \;; \tag{8}$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty A(\alpha)\sin\alpha x d\alpha = 0; & 0 < x < a \\
\int\limits_0^\infty \frac{A(\alpha)}{\alpha}\sin\alpha x d\alpha = \phi_1(x); & a \le x \le b \\
\int\limits_0^\infty A(\alpha)\sin\alpha x d\alpha = 0; & b < x < \infty
\end{cases} \tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty \beta C^*(\beta)\cos\beta z d\beta = 0; & 0 \le z \le c \\
\int\limits_0^\infty \beta^2 C^*(\beta)\cos\beta z d\beta = \phi_2(z); & c < z < d \\
\int\limits_0^\infty \beta C^*(\beta)\cos\beta z d\beta = 0; & d \le z < \infty
\end{cases} \tag{10}
$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty \beta D^*(\beta)\sin\beta z d\beta = 0; & 0 \le z \le c \\
\int\limits_0^\infty \beta^2 D^*(\beta)\sin\beta z d\beta = \phi_3(z); & c < z < d \\
\int\limits_0^\infty \beta D^*(\beta)\sin\beta z d\beta = 0; & d \le z < \infty
\end{cases} \tag{11}
$$

где

$$A(\alpha) = \alpha^2[A_1(\alpha) + \phi_1^*(\alpha)]; \tag{12}$$

$$C^*(\beta) = \sum_{k=1}^{2} b_{3k} C_k(\beta) - \phi_2^*(\beta); \tag{13}$$

$$D^*(\beta) = \sum_{k=1}^{2} b_{1k} D_k(\beta) + \phi_3^*(\beta), \tag{14}$$

а $\varphi_2(\alpha)$; $\varphi_2^*(\beta)$; $\varphi_3(\alpha)$ выражены через известные функции, $\phi_1(x)$; $\phi_1^*(\alpha)$ выражены через $C_k(\beta)$ и известные функции, $\phi_i(z)$; $\phi_i^*(\beta)$; через $A_1(\alpha)$; $B_1(\alpha)$ и известные функции. Подобные “тройные” (9-11) интегральные уравнения рассматривались в работах [3-5].

Следуя [3-5], в (9-11) $A(\alpha)$; $C^*(\beta)$ и $D^*(\beta)$ ищем соответственно в виде:

$$A(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{2n+1}(b\alpha); \tag{15}$$

$$C^*(\beta) = \frac{1}{\beta^2}\sum_{m=1}^{\infty} C_m (2m-1) J_{2m-1}(d\beta); \tag{16}$$

$$D^*(\beta) = \frac{1}{\beta^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu J_{2\nu}(d\beta). \tag{17}$$

Здесь $J_v(z)$ функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

В этом случае, соответственно, в (9-11) третье уравнение приводится в тождество, а первое и второе – в систему уравнений "парных" рядов [6]

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left[(2n+1)\arcsin\dfrac{x}{b}\right] = 0; & 0 < x < a \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ \dfrac{1}{2n+1} \sin\left[(2n+1)\arcsin\dfrac{x}{b}\right] \right\} = \phi_1(x); & a \le x \le b \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m \cos\left[(2m-1)\arcsin\dfrac{z}{d}\right] = 0; & 0 \le z \le c \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m (2m-1)\cos\left[(2m-1)\arcsin\dfrac{z}{d}\right] = \phi_2(z)\sqrt{d^2-z^2}; & c < z < d \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{D_\nu}{\nu} \sin\left[2\nu\arcsin\dfrac{z}{d}\right] = 0; & 0 \le z \le c \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \sin\left[2\nu\arcsin\dfrac{z}{d}\right] = \phi_3(z)\sqrt{d^2-z^2} = 0; & c < z < d \end{cases} \tag{20}$$

Используя результаты работ [7, 8] и обозначая в (18) $x = b\cos(\theta/2)$, а в (19) и (20) соответственно $z = d\sin(\eta/2)$ и $z = d\sin(\zeta/2)$, после некоторых преобразований получено [6]:

$$A_n = \frac{(-1)^n(2n+1)^2}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\pi} F_2(\varphi) P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi; \tag{21}$$

$$C_m = \frac{2m+1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\pi} F_3(\Psi) P_m(\cos\Psi)\sin\Psi d\Psi; \tag{22}$$

$$D_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}\nu\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} F_4(t)\{P_\nu(\cos t) - P_{\nu-1}(\cos t)\}dt, \tag{23}$$

где

$$F_2(\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\phi_1\left(b\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}} d\theta; & 0 < \varphi < \lambda \\ \displaystyle C^* \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}; & \lambda < \varphi < \pi \end{cases} \tag{24}$$

$$C^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2n+1} \tag{25}$$

$$F_3(\Psi) = \begin{cases} 0; & 0 < \Psi < \mu \\ \displaystyle -\frac{1}{2}\int_{\Psi}^{\pi} \frac{G(d\sin\dfrac{\eta}{2})}{(\cos\Psi-\cos\eta)^{1/2}} d\eta; & \mu < \Psi < \pi \end{cases} \tag{26}$$

$$G(d\sin\frac{\eta}{2}) = S^* + d\int_{\eta}^{\pi}\Phi_2(d\sin\frac{\eta}{2})\cos\frac{\eta}{2}d\eta; \tag{27}$$

$$S^* = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m C_m \tag{28}$$

$$F_4(t) = \begin{cases} -d\cos\frac{t}{2}\int_0^t \frac{\phi_3(d\cos\frac{\gamma}{2})\sin^2(\frac{\gamma}{2})}{(\cos\gamma-\cos t)^{1/2}}d\gamma; & 0<t<\delta \\ 0; & \delta<t<\pi \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\gamma = \pi - \zeta, \tag{30}$$

$P_n(cos\varphi)$ − полином Лежандра.

Подставляя (21) в формулу (25) и решая относительно C^*, а (22) − в формулу (28) и решая относительно S^*, можно найти их значения.

Имея в виду (15, 21, 24), из (12) получено:

$$\alpha^2 A_1(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi(\alpha) + F_1^*(\alpha)\ , \tag{31}$$

где

$$F_1^*(\alpha) = \sum_{k=1}^{2} b_{2k}\int_0^{\infty}\beta^2\chi_k(\alpha;\beta)C_k(\beta)d\beta\ , \tag{32}$$

а $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ выражены через известные функции.

Имея в виду (6, 13, 14, 16, 17, 22, 23, 32), исключая $C_k(\beta)$ и $D_k(\beta)$ из (5) и (31), для определения $A_1^*(y)$ и $B_1^*(y)$ получена система из двух интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} A_1^*(y) &= \Omega_1(y) + \int_0^{\infty}K_1(y;\alpha)A_1^*(\alpha)d\alpha + \int_0^{\infty}K_2(y;\alpha)B_1^*(\alpha)d\alpha \\ B_1^*(y) &= \Omega_2(y) + \int_0^{\infty}K_3(y;\alpha)A_1^*(\alpha)d\alpha + \int_0^{\infty}K_4(y;\alpha)B_1^*(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$A_1^*(\alpha) = \alpha^2 A_1(\alpha); \qquad B_1^*(\alpha) = \alpha^2 B_1(\alpha). \tag{34}$$

Из-за объемности $\Omega_i(y)$ и $K_i(y;\alpha)$ их выражения в настоящей статье не представляются.

Систему (33) можно решить методом последовательных приближений при условии, что для ядер системы интегральных уравнений выполняются оценки:

$$\int_0^{\infty}|K_1(y;\alpha)|d\alpha + \int_0^{\infty}|K_2(y;\alpha)|d\alpha < 1,$$

$$\int_0^{\infty}|K_3(y;\alpha)|d\alpha + \int_0^{\infty}|K_4(y;\alpha)|d\alpha < 1,$$

а функции $\Omega_i(y)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $y \to \infty$.

После этого, решая систему (33), можно определить $A_1^*(y)$ и $B_1^*(y)$.

Далее, по формулам (4; 6-8; 12-17); (21-29); (32) последовательно можно определить все искомые функции. После этого, используя основные соотношения теории упругости [2], можно определить напряжения, деформации и перемещения в любой точке полуплоскости.

Ереванский государственный
университет архитектуры и строительства

Ս. Ա. Մելքումյան, Ա. Ժ. Գրիգորյան

Ներքին վերջավոր ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված օրթոտրոպ կիսահարթության մեջ կոշտ դրոշմի անհամաչափ ճնշման մասին

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից որոշ հեռավորության վրա ներքին վերջավոր ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված առաձգական, օրթոտրոպ կիսահարթության ոչ համաչափ հարթ-կոնտակտային խնդիրը՝ ճեղքի առանցքից դեպի աջ որոշ հեռավորության վրա, կիսահարթության հորիզոնական եզրի վերջավոր երկարությամբ հատվածում՝ կիրառված կամայական ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմի ճնշումից:

Ենթադրվում է, որ դրոշմի և կիսահարթության միջև շփումը բացակայում է: Ճեղքի եզրերում զործում են կամայական նորմալ լարումներ, իսկ ճեղքի ձախ հորիզոնական եզրի վրա տրված են նորմալ և շոշափող լարումներ:

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է ճեղքի առանցքով բաժանված երկու քառորդ հարթությունների համար խառը եզրային խնդիրների լուծումների գումարի տեսքով: Այդ լուծումները ներկայացված են տեղափոխությունների համար Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարով:

Օգտվելով եռակի ինտեգրալ հավասարումների մեթոդից, խնդրի լուծումը հանգեցնում է Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի երկու կանոնավոր ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած համակարգի լուծմանը:

Литература

1. *Мелкумян С. А., Григорян А. Ж.* - ДНАН Армении. 1997. Т. 97. № 4. С. 37-43.
2. *Саркисян В. С.* - Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван. Изд. ЕГУ. 1976. 535 с.
3. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* – ДАН Арм ССР. 1977. Т. 65. №2. С. 122-127.
4. *Тоноян В. С., Григорян А. Ж.* - Сб. научн. тр. конф. “Контактные и смешанные граничные задачи механического деформируемого твердого тела (к 85-летию Н. Х. Арутюняна)” Ин-т. механики НАН Армении. 1999. С. 137- 141.
5. *Григорян А. Ж.* - Сб. научн. тр. конф. “Вопр. оптимального управления устойчивости и прочности механических систем”. ЕГУ. 1997. С. 216-219.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* - Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Физматгиз. 1962. 1100 с.
7. *Баблоян А. А.* - ДАН АрмССР. 1964. Т. 39. № 3. С. 149-157.
8. *Sneddon I. N., Srivastav R. P.* - Proc. Roy. Soc. Edin. 1964. V. 66. P. 3. P. 173-184.