

МЕХАНИКА

УДК 539.3

С. О. Саркисян, А. Ж. Фарманян

**Обобщенная ортогональность в плоской задаче
несимметричной теории упругости**

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 19/XII 2000)

Основной итерационный процесс [1,2] позволяет построить асимптотические разложения, определяющие напряженно-деформированное состояние тонкой пластинки по несимметричной теории упругости во всей области трехмерной пластинки за исключением окрестности боковой поверхности. Для нахождения равномерной асимптотики в работе [3] изучен пограничный слой для пластинки по несимметричной теории упругости. Следующий этап исследований состоит в выработке подхода к сопряжению проникающего решения и решения погранслоя и анализе граничных условий на боковой поверхности пластинки с позиций трехмерной несимметричной теории упругости. Полученные в работе [4] условия существования затухающих решений для пластин по несимметричной теории упругости позволяют разделить решение общего напряженно-деформированного состояния пластинки на две самостоятельные граничные задачи: внутреннюю задачу и задачу погранслоя. В симметричной теории упругости при определении произволов погран-слоя существенную роль играет так называемая обобщенная ортогональность однородных решений, а также базисные свойства погранслоя [5-12]. Весьма актуальны аналогичные проблемы и в теории тонких пластин по несимметричной теории упругости.

В данной работе получено соотношение обобщенной ортогональности однородных решений для плоского и антиплоского погранслоев пластинки по несимметричной теории упругости.

1. При изучении асимптотических разложений вспомогательного итерационного процесса (погранслоя) для пластин по несимметричной теории упругости в исходном асимптотическом приближении система уравнений плоского погранслоя отделяется от системы уравнений антиплоского погран-слоя. Одновременно в каждой из указанных систем уравнений соответствующих погранслоев уравнения и граничные условия, определяющие силовые напряжения и

перемещения, отделяются от уравнений и граничных условий, определяющих моментные напряжения и независимые повороты.

Плоский погранслои:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_n \sigma_{11n}^{(0)} + \frac{d\sigma_{31n}^{(0)}}{d\xi} = 0 , \\ -\lambda_n \sigma_{13n}^{(0)} + \frac{d\sigma_{33n}^{(0)}}{d\xi} = 0 ; \\ -\lambda_n \cdot v_{3n}^{(0)} = a \left[(\mu' + \alpha') \bar{\sigma}_{13n}^{(0)} + (\mu' - \alpha') \bar{\sigma}_{31n}^{(0)} \right] , \\ \frac{d \bar{v}_{1n}^{(0)}}{d\zeta} = a \left[(\mu' + \alpha') \bar{\sigma}_{31n}^{(0)} + (\mu' - \alpha') \bar{\sigma}_{13n}^{(0)} \right] , \\ -\lambda_n \cdot \bar{v}_{1n}^{(0)} = a \frac{4\mu'(\lambda' + \mu')}{\lambda' + 2\mu'} \cdot \bar{\sigma}_{11n}^{(0)} + a \frac{2\lambda'\mu'}{\lambda' + 2\mu'} \cdot \bar{\sigma}_{33n}^{(0)} , \\ \frac{d \bar{v}_{3n}^{(0)}}{d\xi} = a \frac{4\mu'(\lambda' + \mu')}{\lambda' + 2\mu'} \cdot \bar{\sigma}_{33n}^{(0)} + a \frac{2\lambda'\mu'}{\lambda' + 2\mu'} \cdot \bar{\sigma}_{11n}^{(0)} , \\ \bar{\sigma}_{31n}^{(0)} / \zeta = \pm 1 = 0 , \quad \bar{\sigma}_{33n}^{(0)} / \zeta = \pm 1 = 0 . \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_n \mu_{12n}^{(0)} + \frac{d\mu_{32n}^{(0)}}{d\zeta} = 0 , \\ -\lambda_n \omega_{2n}^{(0)} = a \frac{4\gamma'\varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \cdot \mu_{12n}^{(0)} , \\ \frac{d \omega_{2n}^{(0)}}{d\zeta} = a \frac{4\gamma'\varepsilon'}{\gamma' + \varepsilon'} \cdot \mu_{32n}^{(0)} , \\ \mu_{32n}^{(0)} / \zeta = \pm 1 = 0 . \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Антиплоский погранслои:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_n \frac{a^{(0)}}{\sigma_{12n}} + \frac{d \sigma_{32n}^{a(0)}}{d\zeta} = 0, \\ -\lambda_n v_{2n}^{(0)} = a \frac{4\mu'\alpha'}{\mu' + \alpha'} \sigma_{12n}^{a(0)}, \\ \frac{d v_{2n}^{a(0)}}{d\zeta} = a \frac{4\mu'\alpha'}{\mu' + \alpha'} \sigma_{32n}^{a(0)}, \\ \sigma_{32n}^{a(0)} / \zeta = \pm 1 = 0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_n \frac{a^{(0)}}{\mu_{11n}} + \frac{d \mu_{31n}^{a(0)}}{d\zeta} = 0, \quad -\lambda_n \frac{a^{(0)}}{\mu_{13n}} + \frac{d \mu_{33n}^{a(0)}}{d\zeta} = 0, \\ -\lambda_n \omega_{3n}^{a(0)} = a \left[(\gamma' + \varepsilon') \mu_{13n}^{a(0)} + (\gamma' - \varepsilon') \mu_{31n}^{a(0)} \right], \\ -\lambda_n \omega_{1n}^{a(0)} = a \frac{4\gamma'(\alpha' + \beta')}{\beta' + 2\gamma'} \mu_{11n}^{a(0)} + a \frac{2\gamma'\beta'}{\beta' + 2\gamma'} \mu_{33n}^{a(0)}, \\ \frac{d \omega_{3n}^{a(0)}}{d\zeta} = a \frac{4\gamma'(\alpha' + \beta')}{\beta' + 2\gamma'} \mu_{33n}^{a(0)} + a \frac{2\gamma'\beta'}{\beta' + 2\gamma'} \mu_{11n}^{a(0)}, \\ \frac{d \omega_{1n}^{a(0)}}{d\zeta} = a \left[(\gamma' + \varepsilon') \mu_{31n}^{a(0)} + (\gamma' - \varepsilon') \mu_{13n}^{a(0)} \right], \\ \mu_{31n}^{a(0)} / \zeta = \pm 1 = 0, \quad \mu_{33n}^{a(0)} / \zeta = \pm 1 = 0. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Здесь $\sigma_{11n}^{p(0)}, \sigma_{31n}^{p(0)}, \sigma_{13n}^{p(0)}, \sigma_{33n}^{p(0)}$ – компоненты силового тензора напряжений в плоском погранслое, $\mu_{12n}^{p(0)}, \mu_{13n}^{p(0)}$ – компоненты моментного тензора напряжений, $v_{1n}^{p(0)}, v_{2n}^{p(0)}$ – компоненты вектора перемещения, $\omega_{2n}^{p(0)}$ – компонент независимого вектора поворота, $\sigma_{12n}^{p(0)}, \sigma_{32n}^{p(0)}$ – компоненты силового тензора напряжений в антиплоском погранслое, $\mu_{11}^{a(0)}, \mu_{31}^{a(0)}, \mu_{13}^{a(0)}, \mu_{33}^{a(0)}$ – компоненты моментного тензора напряжений, $v_{2n}^{a(0)}$ – компонент вектора перемещения, $\omega_{1n}^{a(0)}, \omega_{3n}^{a(0)}$ – компоненты вектора независимого поворота, $\mu', \alpha', \lambda', \beta', \gamma', \varepsilon'$ – упругие постоянные материала пластинки [13], ζ – безразмерная координата ($\zeta = x_3 / h$), $2h$ – толщина пластинки, a – характерный размер в плане пластинки.

Как видно, в математическом аспекте граничные задачи (1.1) и (1.4), а также (1.2) и (1.3) идентичны.

Поставленные краевые задачи представляют собой задачи на собственные значения и собственные функции однородных решений плоской и антиплоской задач теории несимметричной упругости для полуполосы.

Краевую задачу (1.1) плоского погранслоя можно привести к краевой задаче обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка относительно функции $v_{3n}^{(0)}$:

$$\begin{cases} \frac{d^4 v_{3n}^{(0)}}{d\zeta^4} + 2\lambda_n^2 \frac{d^2 v_{3n}^{(0)}}{d\zeta^2} + 2\lambda_n^4 v_{3n}^{(0)} = 0, \\ \left(\left(v_{3n}^{(0)} \right)''' + A\lambda_n^2 \left(v_{3n}^{(0)} \right)' \right)_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \left(\left(v_{3n}^{(0)} \right)'' + B\lambda_n^2 v_{3n}^{(0)} \right)_{\zeta=\pm 1} = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь A и B некоторые выражения от определенных упругих постоянных материала пластинки.

Краевая задача (1.2) плоского погранслоя приводится к краевой задаче обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $\omega_{2n}^{(0)}$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \omega_{2n}^{(0)}}{d\zeta^2} + \lambda_n^2 \omega_{2n}^{(0)} = 0, \\ \left. \frac{d \omega_{2n}^{(0)}}{d\zeta} \right|_{\zeta=\pm 1} = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

К аналогичной (1.6) краевой задаче можно свести краевую задачу (1.3) антиплоского погранслоя относительно функции $v_{2n}^{(0)}$, а также к аналогичной (1.5) краевой задаче – краевую задачу (1.4) антиплоского погранслоя относительно функции $\omega_{3n}^{(0)}$ (следует только постоянные A и B заменить другими постоянными $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, которые представляют аналогичные выражения от соответствующих физических констант).

Для известной краевой задачи (1.6) или аналогичной краевой задачи антиплоского погранслоя относительно функции $v_{2n}^{(0)}$ легко определить собственные значения и собственные функции задачи, а дальше и связанные с ними другие величины, определяющие поставленные задачи.

Что касается краевой задачи (1.5) или аналогичной краевой задачи антиплоского погранслоя относительно функции $\omega_{3n}^{(0)}$, то их отличие от соответствующей краевой задачи на

собственные значения и собственные функции классической теории упругости состоит в том, что спектральный параметр λ_n входит также в выражение граничных условий.

2. Рассмотрим соотношение обобщенной ортогональности краевой задачи (1.1) или (1.4). Приведем все рассуждения для краевой задачи (1.1).

Пусть λ_m и λ_n – простые собственные значения краевой задачи (1.1). При подстановке собственных значений и собственных функций уравнения и граничные условия (1.1) будут обращаться в тождества.

Умножим первое тождество из (1.1) на $v_{1m}^{(0)}$ то же тождество, записанное для номера m на $v_{1n}^{(0)}$, вычтем из первого произведения второе и результат проинтегрируем по ζ от -1 до 1 , учитывая первое граничное условие из (1.1), окончательно получим

$$\int_{-1}^1 \left(\lambda_m \sigma_{11m}^{(0)} v_{1n}^{(0)} - \lambda_n \sigma_{11n}^{(0)} v_{1m}^{(0)} - \sigma_{31n}^{(0)} \frac{d v_{1m}^{(0)}}{d \zeta} + \sigma_{31m}^{(0)} \frac{d v_{1n}^{(0)}}{d \zeta} \right) d \zeta = 0. \quad (2.1)$$

Аналогичные преобразования, связанные со вторым уравнением системы (1.1), с учетом второго граничного условия приводят к соотношению

$$\int_{-1}^1 \left(\lambda_m \sigma_{13m}^{(0)} v_{3n}^{(0)} - \lambda_n \sigma_{13n}^{(0)} v_{3m}^{(0)} - \sigma_{33n}^{(0)} \frac{d v_{3m}^{(0)}}{d \zeta} + \sigma_{33m}^{(0)} \frac{d v_{3n}^{(0)}}{d \zeta} \right) d \zeta = 0. \quad (2.2)$$

Сложим соотношения (2.1) и (2.2) и запишем результат в виде

$$\int_{-1}^1 \left(\lambda_m \sigma_{11m}^{(0)} v_{1n}^{(0)} - \lambda_n \sigma_{11n}^{(0)} v_{1m}^{(0)} - \sigma_{31n}^{(0)} \frac{d v_{1m}^{(0)}}{d \zeta} + \sigma_{31m}^{(0)} \frac{d v_{1n}^{(0)}}{d \zeta} + \lambda_m \sigma_{13m}^{(0)} v_{3n}^{(0)} - \lambda_n \sigma_{13n}^{(0)} v_{3m}^{(0)} - \sigma_{33n}^{(0)} \frac{d v_{3m}^{(0)}}{d \zeta} + \sigma_{33m}^{(0)} \frac{d v_{3n}^{(0)}}{d \zeta} \right) d \zeta = 0. \quad (2.3)$$

Теперь вычтем соотношения (2.1) из соотношения (2.2) и результат представим в виде

$$\int_{-1}^1 \left(\lambda_m \sigma_{11m}^{(0)} v_{1n}^{(0)} - \lambda_n \sigma_{11n}^{(0)} v_{1m}^{(0)} - \sigma_{31n}^{(0)} \frac{d v_{1m}^{(0)}}{d \zeta} + \sigma_{31m}^{(0)} \frac{d v_{1n}^{(0)}}{d \zeta} - \lambda_m \sigma_{13m}^{(0)} v_{3n}^{(0)} + \lambda_n \sigma_{13n}^{(0)} v_{3m}^{(0)} + \sigma_{33n}^{(0)} \frac{d v_{3m}^{(0)}}{d \zeta} - \sigma_{33m}^{(0)} \frac{d v_{3n}^{(0)}}{d \zeta} \right) d \zeta = 0. \quad (2.4)$$

Далее умножим третье тождество из (1.1) на $\sigma_{13m}^{(0)}$, то же самое тождество для номера m умножим на $\sigma_{13n}^{(0)}$ и вычтем первое полученное выражение из второго. Таким же образом умножим четвертое тождество из (1.1) на $\sigma_{11m}^{(0)}$ и аналогичное тождество для номера m на $\sigma_{11n}^{(0)}$, вычтем из первого второе. Пятое тождество из (1.1) умножим на $\sigma_{33m}^{(0)}$, аналогичное тождество, записанное для номера m , умножим на $\sigma_{33n}^{(0)}$ и первый результат вычтем из второго.

И наконец, умножим шестое тождество из (1.1) на $\sigma_{31n}^{p(0)}$ аналогичное тождество по номеру $p(0)$ га умножим на $\sigma_{31n}^{p(0)}$ и первый результат вычтем из второго.

Полученные результаты позволяют видоизменить интегральные тождества (2.3) (2.4).

Из интегрального тождества (2.3) получим

$$(\lambda_m + \lambda_n) \int_{-1}^1 \left(\sigma_{11m}^{p(0)} \nu_{1n}^{(0)} - \sigma_{11n}^{p(0)} \nu_{1m}^{(0)} + \sigma_{13n}^{p(0)} \nu_{3n}^{(0)} - \sigma_{13m}^{p(0)} \nu_{3n}^{(0)} \right) d\zeta = 0. \quad (2.5)$$

Если $\lambda_m \neq -\lambda_n$, отсюда будем иметь

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{11m}^{p(0)} \nu_{1n}^{(0)} + \sigma_{13n}^{p(0)} \nu_{3m}^{(0)} \right) d\zeta = \int_{-1}^1 \left(\sigma_{11n}^{p(0)} \nu_{1m}^{(0)} + \sigma_{13n}^{p(0)} \nu_{3m}^{(0)} \right) d\zeta. \quad (2.6)$$

На основании интегрального тождества (2.4) таким же образом получим

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^1 \left(\sigma_{11m}^{p(0)} \nu_{1n}^{(0)} + \sigma_{11n}^{p(0)} \nu_{1m}^{(0)} - \sigma_{13n}^{p(0)} \nu_{3n}^{(0)} - \sigma_{13m}^{p(0)} \nu_{3n}^{(0)} \right) d\zeta = 0. \quad (2.7)$$

Если $\lambda_m \neq \lambda_n$, отсюда будем иметь

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{11m}^{p(0)} \nu_{1n}^{(0)} - \sigma_{13m}^{p(0)} \nu_{3n}^{(0)} \right) d\zeta = \int_{-1}^1 \left(\sigma_{11n}^{p(0)} \nu_{1m}^{(0)} - \sigma_{11n}^{p(0)} \nu_{1m}^{(0)} \right) d\zeta. \quad (2.8)$$

Теперь, считая, что $\lambda_m^2 \neq \lambda_n^2$ из (2.7) и (2.8), получим требуемое соотношение обобщенной ортогональности для краевой задачи (1.1)

$$\int_{-1}^1 \left(\sigma_{11m}^{p(0)} \nu_{1n}^{(0)} - \sigma_{13n}^{p(0)} \nu_{3m}^{(0)} \right) d\zeta = 0. \quad (2.9)$$

Аналогичным образом для граничной задачи (2.4) получим условие обобщенной ортогональности в виде

$$\int_{-1}^1 \left(\mu_{11m}^{p(0)} \omega_{1n}^{(0)} - \mu_{13n}^{p(0)} \omega_{3m}^{(0)} \right) d\zeta = 0. \quad (2.10)$$

Условия обобщенной ортогональности (2.9) и (2.10) позволяют определить произволы погранслоя при сращивании асимптотических разложений внутренней задачи с задачей погранслоя по несимметричной теории упругости.

Гюмрийский государственный
педагогический институт им. М. Налбандяна

Ս. Հ. Սարգսյան, Ա. Ժ. Ֆարմանյան

**Ընդհանրացված օրթոգոնալությունն առաձգականության
ոչ սիմետրիկ տեսության հարթ խնդրում**

Առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ բարակ սալի ասիմպտոտիկական տեսությունը կառուցված է [1,2] աշխատություններում, որոնցում ցույց են տրվում, որ սալի ընդհանուր լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը բաղդատվում է ներքին խնդրի և սահմանային շերտի հանրագումարի:

Սահմանային շերտի (հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերի) լուծումների մեջ մտնող կամայական հաստատունների որոշման համար կարևոր դեր ունի այդ լուծումների այսպես կոչված «ընդհանրացված օրթոգոնալության» պայմանը:

Աշխատանքում ստացվում են առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերի լուծումների ընդհանրացված օրթոգոնալության պայմանները:

Литература

1. Саркисян С. О. - ДНАН Армении. 1999. Т. 99. № 2. С. 138-147.
2. Саркисян С. О. - ДНАН Армении. 1999. Т. 99. № 3. С. 216-225.
3. Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. - Матер. Междунар. конф. "Прикладные и математические аспекты естествознания". Ереван, 1999. Ноябрь Тапан. 1999. С. 51-55.
4. Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. - ДНАН Армении. 2001. Т. 101. № 1. С. 55-60.
5. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Л. Изд-во строительной промышленности, 1941. 960 с.
6. Гринберг Г. А. - Прикладная математика и механика. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211-228.
7. Ворович И. И. - В сб.: Матер. I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Изд-во Тбилисского ун-та. 1975. С. 51-149.
8. Гольденвейзер А. Л. - Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 510 с.
9. Гусейн-Заде М. И. - Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 752-759.
10. Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М. - ДАН АрмССР. 1975. Т. 50. № 3. С. 157-163.
11. Агаловян Л. А. - Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 С.
12. Устинов Ю. А., Юдович В. И. - Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 706-714.
13. Новацкий В. - Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.