ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 101 2001 № 2

МЕХАНИКА

УДК 593.3

Академик М. А. Задоян

Пластическое течение быстровращающейся конической трубы

(Представлено 27/XI 2000)

Исследуется предельное пластическое состояние конической трубы из идеально пластического материала, быстро вращающегося с медленно возрастающей угловой скоростью со вокруг своей оси. Упругопластическое состояние вращающегося диска исследовано В. В. Соколовским [1]. Линейно-упругое напряженное состояние дисков и цилиндрических труб рассмотрено во многих работах (см. [2]).

1. Центробежная сила, направленная перпендикулярно к оси вращения, будет

$$R = \nu\omega^2\rho ,$$

где ν — масса единицы объема материала трубы, ρ — расстояние от оси вращения.

Задача рассматривается в сферических координатах. Массовые силы в этих координатах будут

$$R_r = R\sin\theta , \quad R_\theta = R\cos\theta .$$

Благодаря осесимметричности деформирования имеем $\omega = \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0$. Далее, рассматривая трубу с малой конусностью, полагаем $\tau_{r\theta} = 0$ по всему объему трубы (рис. 1).

Дифференциальные уравнения равновесия примут следующую форму:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi) + \nu\omega^2 r\sin^2\theta = 0 , \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}(\sigma_\theta - \sigma_\varphi)\,ctg\,\theta + \nu\omega^2 r\sin^2\theta\cos\theta = 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Условие пластичности Губера – Мизеса имеет вид

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_\varphi)^2 = 6k^2 . \tag{2}$$

На внутренней и внешней поверхностях трубы имеем условия

$$\sigma_\theta = 0 \ \text{ при } \ \theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = 0 \ \text{ при } \ \theta = \beta \ . \tag{3}$$

Приведенная система уравнений (1)-(2) с граничными условиями (3) принадлежит к числу “статически определимых” задач теории пластичности.

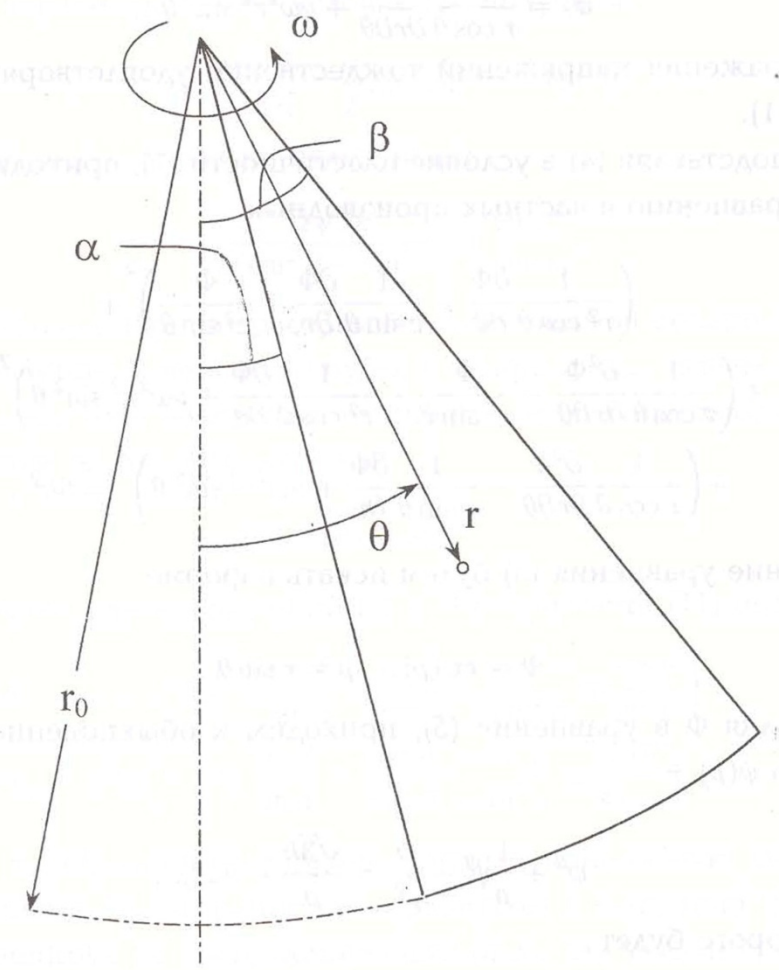

Рис. 1.

Из первого уравнения (1) определяем

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_r) - \sigma_\theta + \nu\omega^2 r^2 \sin^2\theta \ .$$

Далее подобным же образом из второго уравнения (1) находим

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_\theta \sin\theta) + \nu\omega^2 r^2 \sin^2\theta \ .$$

Приравнивая полученные выражения σ_φ, будем иметь

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_r) - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_\theta \sin\theta) - \sigma_\theta = 0 \ .$$

Введем функцию напряжения $\Phi(r,\theta)$ с помощью соотношений

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\Phi}{r^2\sin\theta}\,,$$
$$\sigma_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,, \qquad (4)$$
$$\sigma_r = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} + \nu\omega^2 r^2\sin^2\theta\,.$$

Эти выражения напряжений тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1).

Далее, подставляя (4) в условие пластичности (2), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$\left(\frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r^2\sin\theta}\right)^2 +$$
$$+\left(\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{\Phi}{r^2\sin\theta} - \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \nu\omega^2 r^2\sin^2\theta\right)^2 + \qquad (5)$$
$$+\left(\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \nu\omega^2 r^2\sin^2\theta\right)^2 = 6k^2\,.$$

2. Решение уравнения (5) будем искать в форме

$$\Phi = r\psi(\rho), \quad \rho = r\sin\theta\,. \qquad (6)$$

Подставляя Φ в уравнение (5), приходим к обыкновенному уравнению относительно $\psi(\rho)$ –

$$\psi'' + \frac{1}{\rho}\psi' - \frac{\psi}{\rho^2} = \frac{\sqrt{3}k}{\rho} - \nu\omega^2\rho\,,$$

решение которого будет

$$\psi(\rho) = \frac{\sqrt{3}k}{2}\rho\ln\rho - \frac{1}{8}\nu\omega^2\rho^3 + A\rho + \frac{B}{\rho}\,, \qquad (7)$$

где A и B произвольные постоянные.

Используя (4) и (6), получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \psi'(\rho) + \frac{1}{\rho}\psi(\rho)\,,$$
$$\sigma_\varphi = \rho\psi''(\rho) + 2\psi'(\rho) + \nu\omega^2\rho^2\,. \qquad (8)$$

Далее, используя (7), из (8) получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sqrt{3}k\ln\rho - \frac{1}{2}\nu\omega^2\rho^2 + 2A + \frac{\sqrt{3}k}{2}\,. \qquad (9)$$

В чисто пластическое состояние сначала переходит концевое сечение $r = r_0$, а затем, при возрастании угловой скорости ω, эта область распространяется по направлению к вершине конуса. Минимальное значение ω, при котором сечение $r = r_0$ переходит целиком в пластическое состояние, обозначим через ω_0.

Используя первое граничное условие (3), получаем

$$\sigma_\theta = \sqrt{3}k \ln \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\nu}{2}\omega_0^2 r_0^2(\sin^2\theta - \sin^2\alpha) \ . \qquad (10)$$

Далее из второго условия (3) будем иметь

$$\Omega^2 = \frac{2\sqrt{3}k}{\nu(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)} \ln \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \ , \qquad (11)$$

где обозначено $\Omega = \omega_0 r_0$. При возрастании ω пластическая область распространяется по направлению к вершине трубы, т. е. при $\omega > \omega_0$ имеем $r > r_0$.

Если при $\omega = \omega_*$ зона пластичности определяется поверхностью $r = r_*$, то, используя решение (9) или (10), находим

$$\Omega = \omega_0 r_0 = \omega_* r_* \ .$$

Таким образом, для напряжений (9) и (10) при учете (11) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= \sqrt{3}k\left(\ln \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\sin^2\theta - \sin^2\alpha}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} \ln \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \right) , \\ \sigma_\varphi &= \sqrt{3}k\left(1 + \ln \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\sin^2\theta - \sin^2\alpha}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} \ln \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \right) , \end{aligned} \qquad (12)$$

причем $r_0 \le r \le r_*$. Представляет интерес определение осевой силы. Выделяя мысленно сферической поверхностью с радиусом r конечную часть трубы с вершиной и проецируя на направление силы от σ_r, для удельной осевой силы, приходящейся на единицу площади, будем иметь

$$\bar{\sigma}_r^* = \frac{1}{2(\cos\alpha - \cos\beta)} \int_\alpha^\beta \sigma_r^* \sin 2\theta d\theta \ ,$$

где $\sigma_r^* = \sigma_r \ / \sqrt{3}k$. После интеграции согласно (12) получим

$$\bar{\sigma}_r^* = \frac{1}{4(\cos\alpha - \cos\beta)} \left[(\sin^2\beta + \sin^2\alpha) \ln \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - \sin^2\beta + \sin^2\alpha \right] . \qquad (13)$$

Из (13) при предположении $\alpha = \pi/6, \ \beta = \pi/3$ находим $\bar{\sigma}_r^* \approx 0.03$; между тем минимальное значение $\sigma_\varphi^* = \sigma_\varphi/\sqrt{3}k$, действующее в осевом сечении трубы, равно 1. Иначе говоря, осевая сила (13) по сравнению с σ_φ не имеет практического значения.

3. Из полученного решения для конической трубы легко вывести аналогичные формулы для вращающейся цилиндрической трубы. В системе цилиндрических координат $\rho\varphi z$ при предельном переходе $\theta \to 0, \ r \to \infty$ и фиксированном ρ напряжения σ_θ, σ_φ, σ_r переходят в σ_ρ, σ_φ, σ_z (рис. 2).

Из (9) или (10) следует

$$\sigma_\rho = \sigma_z = \sqrt{3}k\left(\ln\frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a}\right),$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt{3}k\left(1 + \ln\frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}\ln\frac{b}{a}\right),$$

причем $a \le \rho \le b$. Здесь a и b, соответственно, внутренний и внешний радиусы цилиндрической трубы.

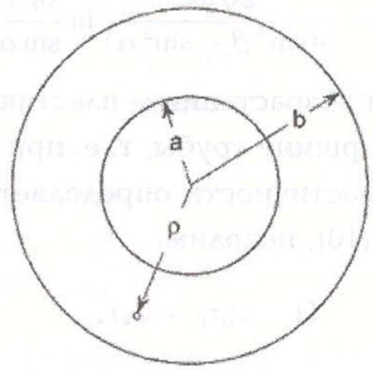

Рис. 2.

Из (11) находим предельное значение угловой скорости

$$\omega_* = \frac{2\sqrt{3}k}{\nu(b^2 - a^2)}\ln\frac{b}{a}.$$

Вывод о незначительности осевой силы в конической трубе для случая цилиндрической трубы также остается в силе.

Институт механики НАН РА

Ակադեմիկոս Մ. Ա. Զադոյան

Արագ պտտվող կոնական խողովակի պլաստիկական հոսքը

Ուսումնասիրվում է առանցքի շուրջն արագ պտտվող իդեալական պլաստիկական նյութից պատրաստված կոնական խողովակի սահմանային պլաստիկական վիճակը: Ներմուծելով լարումների ֆունկցիան, նույնաբար բավարարվում են հավասարակշռության դիֆերենցիալ հավասարումները սֆերիկ կոորդինատներով: Այնուհետև, օգտագործելով իդեալական պլաստիկության Հուբեր Միզեսի պայմանը, խնդիրը բերվում է ոչ-գծային, մասնակի ածանցյալներով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարմանը: Նոր ֆունկցիա մտցնելով, այդ հավասարումը բերվում է երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ

հավասարմանը, որը հեշտությամբ լուծվում է՝ որոշելով սահմանային անկյունային արագացումը:

Սահուն անցումով ստացվում են համապատասխան արդյունքները գլանային խողովակի համար:

Литература

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.-Л. ГИТТЛ. 1950. 396 с.
2. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* - Теория упругости. М. Наука. 1979. 560 с.