

УДК 517.54

Академик Г. Л. Арешян

Инверсия поверхностей

(Представлено 4/IX 2000)

Зададим вокруг начала координат замкнутую выпуклую граничную поверхность S_M $f_M(x_M, y_M, z_M) = 0$, не содержащую начало координат. Под выпуклостью будем понимать требование, чтобы любой луч из начала координат (центральный луч) пересекал граничную поверхность S_M только в одной точке $M(x_M, y_M, z_M)$, что обеспечивает однозначность при инверсии. Рассмотрим три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M(x_M, y_M, z_M)$, которые находятся на одном и том же произвольном центральном луче. При этом условия направляющие косинусы векторов этих точек будут равны друг другу

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_M}{r_M} = \frac{x_2}{r_2}; \quad \cos \beta = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_M}{r_M} = \frac{y_2}{r_2} \\ \cos \gamma &= \frac{z_1}{r_1} = \frac{z_M}{r_M} = \frac{z_2}{r_2} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2} \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Зададим инверсию точки A_1 (или точки A_2) относительно точки M , для получения точки A_2 (или A_1) по закону

$$r_1 r_2 = r_M^2 \quad (3)$$

Из (3) следует, что точки A_1 и A_2 всегда находятся по разные стороны относительно точки M .
На основе (1) имеем

$$x_1 = \frac{r_1}{r_M} x_M, \quad y_1 = \frac{r_1}{r_M} y_M, \quad z_1 = \frac{r_1}{r_M} z_M, \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{r_2}{r_M} x_M, \quad y_2 = \frac{r_2}{r_M} y_M, \quad z_2 = \frac{r_2}{r_M} z_M. \quad (5)$$

Пусть

$$r_1 = kr_M, \quad k > 0. \quad (6)$$

Тогда, используя (3)÷(5), получаем

$$x_1 = kx_M, \quad y_1 = ky_M, \quad z_1 = kz_M, \quad (7)$$

$$x_2 = k^{-1}x_M, \quad y_2 = k^{-1}y_M, \quad z_2 = k^{-1}z_M, \quad r_2 = k^{-1}r_M, \quad (8)$$

$$x_2 = k^{-2}x_1, \quad y_2 = k^{-2}y_1, \quad z_2 = k^{-2}z_1. \quad (9)$$

Пусть теперь в пространстве задана произвольная (не обязательно замкнутая) поверхность S_1 , которая в частных случаях может пересекаться с граничной поверхностью S_M или (и) содержать точку начала координат. Назовем инверсией поверхности S_1 относительно поверхности S_M с получением поверхности S_2 такое преобразование, когда все точки A_1 поверхности S_1 преобразуются по уравнениям (3) ÷ (9) в точки A_2 поверхности S_2 . Ясно, что граничная поверхность S_M при инверсии преобразуется сама в себя.

На основе тех же уравнений (3) ÷ (9) осуществляется инверсия объемов относительно граничной поверхности S_M . При этом точки A_1 являются внутренними точками инверсируемого объема. Внутренние полости объема, ограниченные поверхностями S_1' , инверсируются в полости, а ограниченные поверхностями S_2' - так же, как и внешние поверхности S_1 , в S_2 .

Легко показать, что, если граничная поверхность образована центральной сферой или центральным эллипсом, то все центральные сферы (в первом случае) и все центральные эллипсоиды (во втором случае) преобразуются снова в центральные сферы и центральные эллипсоиды. Внутренние - во внешние и наоборот.

Если граничная поверхность является плоскостью S_M : $x_M \cos \lambda + y_M \cos \beta + z_M \cos \gamma = p_M$, а инверсируемая поверхность S_1 - плоскость, параллельная граничной: $x_1 \cos \lambda + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = p_1$, то в результате инверсии получаем поверхность плоскости S_2 , которая оказывается параллельной этим плоскостям: $x_2 \cos \lambda + y_2 \cos \beta + z_2 \cos \gamma = p_2$. При этом $p_1 p_2 = p_M^2$.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда граничная поверхность S_M - произвольная замкнутая поверхность

$$f_M(x_M, y_M, z_M) = 0, \quad (10)$$

которая может быть задана аналитически либо в виде множества дискретных значений координат

точек $M(x_M, y_M, z_M)$. Поверхность S_1 , инверсию которой необходимо осуществить, также должна быть задана либо аналитически

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad (11)$$

либо в виде множества дискретных значений координат точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Для каждой точки A_1 определяются величины направляющих косинусов (см. (1)) и на поверхности S_M находится методом поиска точка $M(x_M, y_M, z_M)$, радиус-вектор которой имеет те же самые значения направляющих косинусов, что и соответствующая точка A_1 . Далее по известным координатам точек A_1 и M по уравнениям (2) ÷ (9) определяются координаты точки A_2 .

В результате получаем множество точек A_2 , которые дискретно представляют поверхность S_2 , которая является инверсной относительно поверхностей S_1 и S_M .

В случае, если граничные поверхности S_M и S_1 заданы аналитически уравнениями (10) и (11), то определение координат точки A_2 для соответствующей точки A_1 производится следующим образом. На основе (11) определяются координаты x_1, y_1, z_1 произвольной точки A_1 , которая принадлежит поверхности S_1 . В (10) подставляются координаты с неопределенным множителем

$$x_M = \lambda x_1, \quad y_M = \lambda y_1, \quad z_M = \lambda z_1. \quad (12)$$

Величина этого множителя инверсии λ для данной точки A_1 определяется из полученного уравнения

$$f_M(\lambda, x_1, y_1, z_1) = 0. \quad (13)$$

Далее используется только положительное значение λ . На основании (9) определяются координаты инверсированной точки

$$x_2 = \lambda^2 x_1, \quad y_2 = \lambda^2 y_1, \quad z_2 = \lambda^2 z_1, \quad \lambda = k^{-1}. \quad (14)$$

Процедура повторяется для необходимого множества точек A_1 и A_2 .

Предлагаемый метод инверсии поверхностей и их объемов относительно заданной граничной поверхности может найти применение при автоматизации моделирования различных трехмерных объектов. Для этого необходимо произвести исследования по инверсии различных типовых поверхностей и их объемов относительно также ряда граничных поверхностей. Возникает необходимость составления соответствующих программ расчета на ЭВМ.

В целом, несомненно, что инверсия поверхностей и объемов является новой областью для проведения исследований.

Государственный инженерный университет Армении

Ակադեմիկոս Գ. Լ. Արեշյան

Մակերեսների ինվերսիա

Դիտարկված է տարբեր սահմանային մակերեսների նկատմամբ մակերեսների ինվերսիան: