УДК 517.57

К. Л. Аветисян

О неравенствах типа Литтлвуда - Пэли

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 22/XII 2000)

1. Пусть $\mathbf{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство, и пусть $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$. Обозначим через $\mathbf{R}_+^{n+1}$ верхнее полупространство пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, т.е. $\mathbf{R}_+^{n+1} = R^n \times (0,\infty)$. Точки этого полупространства будем представлять как $(x,y) = (x_1, ..., x_n, y)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y > 0$.

В монографии [1] И. Стейн распространил классическую g-функцию Литтлвуда-Пэли [2] для единичного круга на случай полупространства $\mathbf{R}_+^{n+1}$ и привел ряд приложений к ней. Для интеграла Пуассона $f(x,y)$ функции $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, g-функция Литтлвуда-Пэли в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ определяется как нелинейный оператор следующего вида:

$$g(f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} y|\nabla f(x,y)|^2\, dy \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где ∇- градиент.

Теорема А. (*Стейн [1]*) *Пусть* $1 < p < \infty$, $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$. *Тогда* $g(f)(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *причем существуют положительные постоянные* C_1 *и* C_2, *не зависящие от* f, *такие, что*

$$C_1\|f\|_{L^p} \le \|g(f)\|_{L^p} \le C_2\|f\|_{L^p}. \quad (2)$$

Кроме того, Стейн [1] отмечает, что g-функция и неравенства (2) могут быть обобщены на градиенты более высокого k-го порядка (k- целое, k > 1). С другой стороны, изучение различных весовых пространств голоморфных и гармонических функций приводит к необходимости обобщения g-функции и теоремы А на производные любого (дробного) порядка $\alpha > 0$. Такое обобщение дал Флетт [3] для голоморфных в единичном круге функций.

В настоящей заметке на полупространстве $\mathbf{R}_+^{n+1}$ и посредством дробных производных произвольного порядка $\alpha > 0$ определены функции $g_{q,\alpha}(f)$ типа Литтлвуда-Пэли и обобщена теорема А.

2. Для функции $f(x,y)$, измеримой и комплекснозначной в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, введем в рассмотрение оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля (называемый также потенциалом Рисса):

$$\mathbf{D}^{-\alpha}f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(x,y+\sigma)\,d\sigma,$$

$$\mathbf{D}^0 f = f, \quad \mathbf{D}^\alpha f(x,y) = (-1)^m \mathbf{D}^{-(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y),$$

где $\alpha > 0$, а m- целое, $m-1 < \alpha \le m$.

Ядро Пуассона в верхнем полупространстве дается формулой

$$P(x,y) = k_n \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}, \qquad k_n = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

Символы $C(\alpha,\beta,...)$, c_α обозначают различные положительные постоянные, зависящие только от указанных индексов α, β,.... Пусть $\mathbf{Z}_+^{n+1}$ - множество всех мультииндексов $\lambda = (\lambda_1,..., \lambda_n, \lambda_{n+1})$ с неотрицательными координатами $\lambda_j \in \mathbf{Z}_+$, и пусть $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}$ и $\partial^\lambda = ([(\partial)/(\partial x_1)])^{\lambda_1} \ldots ([(\partial)/(\partial x_n)])^{\lambda_n}([(\partial)/(\partial y)])^{\lambda_{n+1}}$.

3. Для $\alpha > 0$, $0 < q \le \infty$ и функции $f(x,y)$, заданной в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, определим g-функцию типа Литтлвуда-Пэли (ср. [1-3]):

$$g_{q,\alpha}(x) \equiv g_{q,\alpha}(f)(x) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} y^{\alpha q-1} |\mathbf{D}^\alpha f(x,y)|^q \, dy \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{y>0} \; y^\alpha |\mathbf{D}^\alpha f(x,y)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = 1$ функция $g_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g-функции (1) (с производной по y вместо градиента).

Для формулировки основного результата понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если* $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$, *то справедливы оценки*

$$|\mathbf{D}^\alpha P(x,y)| \le C(\alpha,n) \frac{1}{(|x| + y)^{\alpha+n}}, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \; y > 0,$$

$$|\partial^\lambda P(x,y)| \le C(\lambda,n) \frac{1}{(|x| + y)^{|\lambda|+n}}, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \; y > 0.$$

В частности, если $\alpha \ge 1$, *то*

$$|\mathbf{D}^{\alpha}P(x,y)| \le C(\alpha,n)\,\frac{P(x,y)}{y^{\alpha}}, \qquad x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0.$$

Лемма 2. *Пусть* $f(x,y)$ - *гармоническая функция в* $\mathbf{R}_+^{n+1}$ и $0 < p,q \le \infty$, $\alpha > 0$. *Тогда*

$$|\mathbf{D}^{\alpha}f(x,y)| \le C(p,q,\alpha,n)\,\frac{\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}}{y^{\alpha+n/p}} \qquad x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0. \qquad (3)$$

Лемма 3. *Пусть* $\beta > 0$, *и* $f(x,y)$ - *гармоническая функция в* $\mathbf{R}_+^{n+1}$ *такая, что* $D^{\beta}f(x,y) = o(1)$ *равномерно в* $\mathbf{R}^n$ *при* $y \to +\infty$. *Если* $1 \le p \le q < \infty$, $\alpha > 1/p-1/q$ *либо* $1 < p \le q < \infty$, $\alpha = 1/p-1/q$, *то*

$$g_{q,\beta}(f)(x) \le C(\alpha,\beta,p,q)\, g_{p,\beta+\alpha}(f)(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n. \qquad (4)$$

Неравенство (4) аналогично известному неравенству Харди (см. [1]) и позволяет свести доказательство нижеследующей теоремы 1 к случаю целых α. Отметим, что условие в лемме 3, наложенное на $\mathbf{D}^{\beta}f(x,y)$, обеспечивает обратимость оператора $\mathbf{D}^{\alpha}$.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha > 0$, $\delta > 0$, *и* $f(x,y)$ - *гармоническая функция в* $\mathbf{R}_+^{n+1}$, *и пусть*

$$f_{\delta}^{*}(x) = \sup\,\{|f(\xi,\eta)|;\ (\xi,\eta) \in \Gamma_{\delta}(x)\}$$

- ее некасательная максимальная функция, где

$$\Gamma_{\delta}(x) = \{(\xi,\eta) \in \mathbf{R}_+^{n+1};\ |\xi - x| < \delta\eta\}$$

- конус Лузина с вершиной в точке $x \in \mathbf{R}^n$. *Тогда*

$$|\mathbf{D}^{\alpha}f(x,y)| \le C(\alpha,\delta)\,\frac{f_{\delta}^{*}(x)}{y^{\alpha}}, \qquad x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0. \qquad (5)$$

Далее рассмотрим вариант интеграла площадей Лузина:

$$S(f)(x) = \left(\int\!\!\int_{\Gamma_1(x)} \eta^{1-n} \left| \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}, \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

где интеграл распространен по всему конусу Лузина $\Gamma_1(x)$.

Лемма 5. *Справедлива оценка* $(k \ge 1)$

$$g_{2,k}(f)(x) \le C(n,k)\, S(f)(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n. \qquad (6)$$

Случай $k = 1$ *см. в [1].*

Теорема 1. *Если* $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $2 \le q < \infty$, *и* $f(x,y)$ - *интеграл Пуассона функции* $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *то*

$$\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n)\|f\|_{L^p}. \qquad (7)$$

Если $\alpha \ge 1$, то теорема верна и при $q = \infty$. Отметим, что в отличие от Флетта [3] доказательство теоремы 1 основано на применении сильных интерполяционных теорем типа Рисса-Торина.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, *и* $0 < q \le 2$. *Если* $f(x,y)$ - *гармоническая в* $\mathbf{R}_+^{n+1}$ *функция, равномерно стремящаяся к нулю при* $y \to +\infty$, *и* $g_{q,\alpha}(f) \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *то* $f(x,y)$ *является интегралом Пуассона некоторой функции* $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *причем*

$$\|f\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n)\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}. \qquad (8)$$

Ереванский государственный университет
Институт математики НАН Армении

Литература

1. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир. 1973.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир. 1965.
3. *Flett T. M.* Pacific J. Math. (1968). V. 25. P. 463-494.

Կ. Լ. Ավետիսյան

Լիթլվուդ-Պելիի տիպի անհավասարությունների մասին

Հոդվածում դիտարկված են Լիթլվուդ-Պելիի

$$g(\theta; F) = \left(\int_0^1 (1-\tau)\,|F^{'}(\tau e^{i\theta})|^2 dr \right)^{1/2}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi)$$

ֆունկցիայի (F-ը հոլոմորֆ է միավոր շրջանում) և նրա հետ կապված L^p-անհավասարությունների անալոգները R_+^{n+1} վերին կիսատարածությունում: Կամայական $\alpha > 0$ կարգի կոտորակային ածանցյալների միջոցով հոդվածում սահմանված են Լիթլվուդ-Պելիի տիպի $g_{q,\alpha}(f)(x)$ ֆունկցիաները, որոնք համապատասխանում են դասական g-ֆունկցիային, երբ $q = 2$ և $\alpha = 1$: Նրանց միջոցով ընդհանրացված են Ստեյնի [1] հայտնի L^p-անհավասարությունները: Ցույց է տրված, որ $\left\|g_{q,\alpha}(f)\right\|_{L^p}$ և $\|f\|_{L^p}$ նորմերը համարժեք են: Միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար նմանօրինակ մի ընդհանրացում ստացել էր Ֆլետտը [3]: Բերված թեորեմ 1-ը և թեորեմ 2-ը կիրառելի են ֆունկցիաների կշռային դասերի տեսության մեջ: