

УДК 519.65, 517.57

Академик А. Б. Нерсисян

Квазиэкспонента и квазипреобразования Фурье

(Представлено 30/XI 2000)

1. Пусть $z \in \mathbb{C}^m$, $m \geq 1$. Через $\{z_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) обозначим компоненты z , через $zw(z/w)$ обозначим вектор с компонентами $\{z_k w_k\}$ ($\{z_k/w_k\}$), а через $\langle z, w \rangle$ - скалярное произведение $\sum z_k \overline{w_k}$ ($|z|^2 = \langle z, z \rangle$). Будем также считать, что $z \neq 0$, $z > 0$, $z \in \mathbb{R}^m$, $z = \infty$, z - целое, четное и т. п.,

если таковы все компоненты z . Если в сумме $\sum_{s=u}^v$ u и v целые и $u \leq v$, то предполагается суммирование по всем целым компонентам s , таким, что $u \leq s \leq v$.

Зафиксировав теперь неотрицательное A и положительное N , рассмотрим функцию θ , именуемую в дальнейшем *базовой* (s - целое) ¹

$$\theta = \theta(\lambda, s) = \theta(\lambda, s, N), \quad \lambda \in \mathbb{C}^m, s \in \mathbb{R}^m, \theta \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Будем предполагать, что θ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$d_1(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |\theta(\lambda, s)| e^{\pi \langle Ns, A \rangle} < \infty, \quad (2)$$

$$d_2(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |\theta(\lambda, s)|^2 e^{2\pi \langle Ns, A \rangle} < \infty. \quad (3)$$

Основным объектом дальнейшего изучения является функция $e(\lambda, x)$, - назовем ее *квазиэкспонентой*, - формально определяемая рядом

$$e(\lambda, x) = e(\lambda, x, N, \theta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta(\lambda, s) e^{i\pi \langle \lambda + Ns, x \rangle} \quad (4)$$

Очевидно, что при выполнении условия (2) $e(\lambda, x)$ локально непрерывна по $x \in \mathbb{C}^m$, $|\operatorname{Im} x| \leq A$.

Лемма 1. Если $k \in \mathbb{R}^m$ - целое и выполнено условие (2), то

$$e(\lambda, x + 2k/N) = e^{2i\pi \langle \lambda, k/N \rangle} e(\lambda, x). \quad (5)$$

Для данного $T \in \mathbb{R}^m$, $T > 0$, обозначим

$$D_T = \{x \in \mathbb{R}^m, |x_k| \leq T_k, \quad k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (6)$$

Лемма 2. Если функции $\theta_1 = \theta_1(\lambda, s)$, $\theta_2 = \theta_2(\lambda, s)$ удовлетворяют условиям (3) и параметры $T_{p,q} \in \mathbb{R}^m$ - целые, то

$$\int_{D_T} \overline{e(p,x,\theta_1)} e(q,x,\theta_2) dx = 2^m \left(\prod_{k=1}^m T_k \right) \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} \overline{\theta_1(p,s)} \theta_2(q,s) \right) \delta_{p,q}, \quad (7)$$

где $\delta_{p,q}$ - символ Кронекера.

2. Обозначим теперь

$$\rho(x) = \rho(x,N) = \int_{D_{N/2}} e(\lambda,x) d\lambda, \quad x \in \mathbb{C}^m, \quad |\operatorname{Im} x| \leq A \quad (8)$$

и назовем эту функцию **опорной**. Функция $\rho(x)$ существует, - и даже непрерывна, - если выполнено условие (2).

Введем в рассмотрение также функцию μ , фактически отличающуюся от функции θ только другой формой записи

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) &= \mu(\lambda,N) = \theta(u,v,N), \\ \operatorname{Re} u &= \operatorname{Re} \lambda \pmod{N}, \quad u \in D_N, \quad v = (\lambda - u)/N, \lambda \in \mathbb{C}^m. \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что, при $-N/2 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq N/2$, $\theta(\lambda,s) = \mu(\lambda + Ns)$.

Лемма 3. Если $\mu = \mu(\lambda) = \mu(\lambda, N) \in L_2(\mathbb{R}^m)$ и выполнено условие (2), то

$$\rho(x) = \rho(x,N) = 2^{m/2} \hat{\mu} = \int_{D_{\mathbb{R}^m}} e^{i\pi \langle \lambda, x \rangle} \mu(\lambda,N) d\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m, \quad (10)$$

где использован символ $\hat{\mu}$ преобразования Фурье от μ .

Наряду с леммами 1 и 2 отметим также следующий аналог известного свойства экспоненты.

Лемма 4. Если θ определяется формулой (11), где μ не зависит от N , то для $0 < k \in \mathbb{R}^m$

$$e(\lambda/k, kx, N) = e(\lambda, x, kN). \quad (11)$$

Переобозначим базовую функцию θ как зависящую от двух дополнительных параметров α и β следующим образом:

$$\theta(\lambda,s) = \theta(\lambda,s,N,\alpha,\beta) = \mu(\alpha(\lambda/N + s), N) e^{i\pi \langle \beta, s \rangle}, \quad (12)$$

где $N, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$, $\alpha > 0$, $\beta_k \in [0, 2\pi)$, $(k = 1, 2, \dots, m)$.

Предположим теперь, что $0 \leq L \in \mathbb{R}$, $\rho(x)$ кусочно-непрерывна и ряд

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{\pi L s} \rho(x - 2s - \beta, N), \quad |\operatorname{Im} x| \leq A$$

абсолютно и равномерно сходится по x на каждом компакте в R^m . Отметим, что в одномерном случае ($m = 1$) и при $A = 0$, согласно известной лемме Харди (см.[1]), достаточно потребовать, чтобы $\rho(x) \in L_1(R)$ имела ограниченную вариацию и была нормирована как $\rho(x) = (\rho(x + 0) + \rho(x - 0)) / 2$.

Центральным результатом данной работы является

Теорема 1. При $|\operatorname{Im} x| \leq A$ и $|\operatorname{Im} \lambda| \leq L$ квазиэкспонента представима в виде

$$e(\lambda, x) = \alpha^{-1} e^{-i\pi \langle \lambda/N, \beta \rangle} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho(\alpha^{-1}(Nx - 2s - \beta)) e^{2i\pi \langle \lambda, s/N \rangle}. \quad (13)$$

3. Если выполнено условие (2), обозначим

$$a_\gamma(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \langle s, \gamma \rangle} \theta(\lambda, s), \quad -1 \leq \gamma \leq 1. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что при $a_\gamma(\lambda) \neq 0$ функция $a_\gamma(\lambda)^{-1} e(\lambda, x)$ является интерполяцией экспоненты $e^{i\pi \langle \lambda, x \rangle}$ на сетке $\{(2k + \gamma) / N\}$, где k - произвольное целое. Пусть теперь задана некоторая ограниченная комплекснозначная функция $\omega = \omega(\lambda) = \omega(\lambda, N)$, $\lambda \in C^m$, $\omega \in C$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (2). Тогда при любом $x \in C^m$

$$|e^{i\pi \langle \lambda, x \rangle} - \omega(\lambda) e(\lambda, x)| \leq \exp(\pi(\operatorname{Re}(\lambda) \operatorname{Im}(x) - \operatorname{Re}(x) \operatorname{Im}(\lambda))) \left(|1 - \omega(\lambda) \theta(\lambda, 0)| + |\omega(\lambda)| \sum_{s=-\infty}^{\infty} |\theta(\lambda, s)| e^{\pi \langle Ns, \operatorname{Im} x \rangle} \right), \quad |\operatorname{Im} x| \leq A, \quad (15)$$

где символ $\sum_{s \sim \infty}$ означает, что $s \neq 0$.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (3) и $0 < T \in R^m$. Тогда

где $[T_k]$ - целая часть T_k и символ $\sum_{s \sim \infty}$ означает, что $s \neq 0$.

В частности, при $\omega = (a_\gamma)^{-1}$ теоремы 1 и 2 характеризуют близость интерполирующей функции $\omega(\lambda) e(\lambda, x)$ к экспоненте.

4. В дальнейшем, - ради простоты формул, - будем считать, что $\lambda, x \in R^m$, $d_2(\lambda) \neq 0$ и выполнены условие (3) и представления (12), (13) при $A = 0, \alpha = 1, \beta = 0$.

Теорема 4. Правая часть оценки (16) принимает минимальное значение при

$$\omega(\lambda) = d_2(\lambda)^{-1/2} \theta(\lambda, 0). \quad (17)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$e_0(\lambda, x) = 2^{-m/2} d_2(\lambda)^{-1/2} e(\lambda, x). \quad (18)$$

Квазипреобразованиями Фурье (соответственно прямым и обратным) назовем операторы

$$(\Phi f)(x) = \int_{D_{N/2}} e_0(\lambda, x) f(\lambda) d\lambda, \quad f \in L_2(D_{N/2}), \quad (19)$$

$$(\Psi g)(\lambda) = \int_{R^m} \overline{e_0(\lambda, x)} g(x) dx, \quad g \in L_2(R^m). \quad (20)$$

Для функции $f(\lambda) \in L_2(D_{N/2})$ через $f^N(\lambda) \in L_{2 \text{ loc}}$ обозначим ее N -периодическое продолжение на R^m (т. е. N_k - периодическое продолжение по каждой компоненте λ_k).

Лемма 5. При $\theta(\lambda) \in C_{\text{loc}}$

$$\Phi f = (d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N) f^N(\lambda))^\wedge \in L_2(R^m), \quad f(\lambda) \in L_2(D_{N/2}). \quad (21)$$

Лемма 6. При $\mu(\lambda) \in C_{\text{loc}}$ для любых $f \in L_2(D_{N/2})$ и $g \in L_2(R^m)$ справедливы соотношения

$$\|\Phi f\|_1 = \|f\|_2, \quad \|\Psi g\|_2 \leq \|g\|_1, \quad (22)$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ - нормы в $L_2(R^m)$ и $L_2(D_{N/2})$ соответственно.

Таким образом, $\Phi : L_2(R^m) \rightarrow L_2(D_{N/2})$ и $\Psi : L_2(D_{N/2}) \rightarrow L_2(R^m)$, причем отображение Φ изометрично, а Ψ не увеличивает норму. На самом деле отображение Ψ есть обратное к Φ , что является следствием следующего, более общего, результата.

Теорема 5. Пусть отображение Φ_1 соответствует базовой функции θ_1 , определяемой μ_1 согласно (9), а отображение Ψ_2 - базовой функции θ_2 , определяемой μ_2 . Предположим, что θ_1 удовлетворяет условиям леммы 4, θ_2 - условию (3). Тогда

$$\Psi_2(\Phi_1 f)(\lambda) = \sigma_{12}(\lambda) f(\lambda), \quad (23)$$

где

$$\sigma_{12}(\lambda) = (d_2(\lambda, \mu_1) d_2(\lambda, \mu_2))^{-1/2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_1(s + \lambda/N) \mu_2(s + \lambda/N),$$

причем $|\sigma_{12}(\lambda)| \leq 1$ и только при $\mu_1 \equiv \mu_2$ имеем $\sigma_{12}(\lambda) \equiv 1$.

Оказывается, что отображения Φ и Ψ являются аппроксимациями классического преобразования Фурье (соответственно прямого и обратного).

Теорема 6. Пусть $\mu(\lambda) \in L_2(R^m)$ и выполнено условие (3). Тогда для любого $f \in L_2(R^m)$

$$\begin{aligned} \|\hat{f} - \Phi f\| &\leq \sqrt{\int_{D_{N/2}} |f(\lambda)|^2 |1 - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N)|^2 d\lambda} + \\ &+ \sqrt{\int_{\mathbb{R}^m \setminus D_{N/2}} |f(\lambda) - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N) f^N(\lambda)|^2 d\lambda}, \end{aligned} \quad (24)$$

где в Φf использовано сужение $f(\lambda)$ на $D_{N/2}$, а $\|\cdot\|_1$ и $f^N(\lambda)$ определены, как в леммах 4 и 5.

Теорема 7. Пусть $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$ и выполнено условие (3). Тогда

$$\begin{aligned} \|\check{g} - \Psi g\|_2 &\leq \|\check{g}(\lambda)(1 - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N))\|_2 + \\ &+ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|d_2(\lambda)^{-1/2} \check{g}(\lambda + Ns) \mu(\lambda/N + s)\|_2 \leq \end{aligned} \quad (25)$$

$$\left(\int_{D_{N/2}} |1 - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N)|^2 d\lambda \right) \|g\|_1 + \int_{\mathbb{R}^m \setminus D_{N/2}} |g(x)|^2 dx,$$

где $\sum_{s=-\infty}^{\infty}$, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ определены, как в теореме 1 и лемме 4 соответственно.

Следующие двойственные представления операторов Φ и Ψ вытекают из формулы (13).

Теорема 8. В условиях леммы 3 для любых $f \in L_2(D_{N/2})$ и $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$

$$(\Phi f)_x = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho(Nx - 2s) \int_{D_{N/2}} e^{i\pi \langle \lambda, 2s/N \rangle} d_2(\lambda)^{-1/2} f(\lambda) d\lambda, \quad (26)$$

$$(\Psi g)(\lambda) = d_2(\lambda)^{-1/2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \langle \lambda, 2s/N \rangle} \int_{\mathbb{R}^m} \rho(Nx - 2s) g(x) dx. \quad (27)$$

5. Общеизвестна фундаментальная роль экспоненты Фурье $e^{ix\lambda}$ как в теоретических, так и прикладных дисциплинах. Достаточно упомянуть аппарат рядов и преобразований Фурье, чтобы подчеркнуть важность оптимизации вычислительных процессов, связанных с экспонентой. Такой современный метод разработки быстрых алгоритмов, как теория вейвлетов, по сути, связан с анализом Фурье, т. е., в конечном счете, с той же экспонентой (см., например, [4-6]).

Приведенный подход основан на общем методе работы [6]. Исходное представление квазиэкспоненты (4) удобно для оценки ошибки от замены экспоненты квазиэкспонентой, в то время как формула (13) гораздо эффективнее для вычисления значений квазиэкспоненты и может служить основой быстрых алгоритмов, поскольку, с одной стороны, она содержит оператор дискретного преобразования Фурье, а с другой - сжатия и сдвиги определенной функции ρ .

Понятно, что случай, когда $\rho(x)$ имеет финитный ("почти финитный" - относительно заданной точности) носитель, наиболее интересен. Отметим, что при целом λ приведенные результаты содержат схему построения периодических вейвлетов на отрезке $[-1,1]$ (см. [2], а также [3-5]).

Возможности приложения свойств квазиэкспоненты довольно многообразны. Здесь мы не будем их перечислять, а укажем только алгоритмы быстрого вычисления рядов и классических преобразований Фурье (см. теоремы 5-8), а также дискретных преобразований Фурье на неравномерных сетках (НДПФ)(см. теорему 1).

В последнем случае предлагаемая схема, в отличие от известных (см. [7,8]), позволяет практически точно оценить ошибку от замены экспоненты квазиэкспонентой. Реализованы соответствующие быстрые НДПФ-алгоритмы, ориентированные на заданную точность.

Численные эксперименты подтверждают перспективность эффективного применения квазиэкспоненты в ряде других задач.

Институт математики НАН РА

Литература

1. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
 2. *Daubechies I.* Ten lectures of wavelets. CBMS-NSF Series of Appl. Math., SIAM Publications, Philadelphia. 1992.
 3. *Edelman A., McCourcodale P., Toledo S.* - SIAM J. Sci. Comput. 1999. V. 20. № 3. P. 1094-1114.
 4. *Locher F.* - Math. Comput., 1995. V. 64. № 210. P. 671-690.
 5. *Нерсисян А.Б.* - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. № 1. С. 23-30.
 6. *Nersessian A.* - Numer. Funct. Anal. and Optimization. 2000. V. 21(1&2). P. 227-240.
 7. *Dutt A., Rokhlin V.* - SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1993. V. 14. № 6. P. 1368-1393.
 8. *Ware A.F.* - SIAM Review. 1998. V. 40. № 4. P. 838-856.
-

Footnotes:

¹Здесь и далее в определениях функций будем указывать все ее аргументы, опуская некоторые из них впоследствии.

²Будем пользоваться также общеизвестным символом обратного преобразования Фурье ($\mu = 2^{-m/2} \check{\rho}$).

Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսիսյան

Քվադրէքսպոնենցիալ ֆունկցիան և Ֆուրյեի քվադրձևափոխությունները

Ուսումնասիրվում է էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի մի ընդհանրացում (քվադրէքսպոնենցիալ ֆունկցիան), որը թույլ է տալիս ստանալ (13) ներկայացումը: Վերջինս կարող է արագ ալգորիթմների հիմք ծառայել, քանի որ, մի կողմից՝ պարունակում է դիսկրետ (արագ) Ֆուրյեի ձևափոխություն, իսկ մյուս կողմից՝ որոշակի ֆունկցիայի սեղմումներ և տեղափոխություններ: Ստացված են էքսպոնենցիալ և քվադրէքսպոնենցիալ ֆունկցիաների տարբերության գնահատականները (թեորեմներ 2 և 3):

Քվադրէքսպոնենցիալ ֆունկցիայի հիման վրա սահմանվում են Ֆուրյեի ուղիղ և հակադարձ (19), (20) քվադրձևափոխությունները, որոնք կոչված են ծառայել որպես Ֆուրյեի դասական ձևափոխության արագ թվային հաշվման հիմք: Արդյունքների հիմքում ընկած է [5,6] աշխատանքներում առաջարկված եղանակը: