УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян, Л. Г. Гулгазарян

О характере пограничного слоя при собственных колебаниях ортотропной полосы

(Представлено 11/V 2000)

Собственным колебаниям ортотропной полосы посвящены работы [1, 2], в которых найдены частоты собственных колебаний и установлены связи между ними и скоростями распространения сейсмических сдвиговых и продольных волн. Случай общей анизотропии рассмотрен в [3]. Собственные колебания ортотропной полосы при смешанных граничных условиях рассмотрены в [4], а двухслойной ортотропной полосы в [5-7]. Пограничный слой в задаче о собственных колебаниях полосы, когда одна из продольных кромок жестко закреплена, а другая свободна, рассмотрен в [8]. В [9] изучен пограничный слой в задаче о собственных колебаниях двухслойной изотропной полосы при неполном контакте между слоями.

В работе рассматриваются собственные колебания ортотропной полосы в зоне пограничного слоя, выведено уравнение для определения показателей, характеризующих скорость затухания величин погранслоя. Показано, что каждой частоте собственных колебаний соответствует отдельный класс пограничных функций.

При исследовании собственных колебаний ортотропной полосы $\Omega = \{ (x, y) : x \in [0, l], |y| \leq h,\ h << l\}$ однородные динамические уравнения плоской задачи [10, 11] приводятся к сингулярно возмущенной малым параметром $\varepsilon = h / l$ системе уравнений. Решение этой системы складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Количество произвольных констант в решении внутренней задачи недостаточно для удовлетворения краевым условиям на боковой поверхности полосы. Возникающая неувязка устраняется с помощью качественно нового решения - пограничного слоя.

Частоты ω собственных колебаний ортотропной полосы определяются из решения внутренней задачи [1], в частности, когда на лицевых поверхностях заданы условия

$$\sigma_{xy}(h) = 0, \quad \sigma_{yy}(h) = 0, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xy}(-h) = 0, \quad v(-h) = 0, \tag{1.2}$$

они определены в [4] и связаны со скоростями распространения сейсмических сдвиговых и продольных волн V_s и V_p следующим образом:

$$\omega_s = \frac{\pi n}{h\sqrt{a_{66}\rho}} = \frac{\pi n}{h} V_s,\ n \in N,$$
$$\omega_p = \frac{\pi(2n-1)}{4h\sqrt{A_{11}\rho}} = \frac{\pi(2n-1)}{4h} V_p, \tag{1.3}$$

$$A_{11} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/a_{11} ,$$

где ω_s частота собственных сдвиговых колебаний, а ω_p - продольных колебаний.

Для построения решения пограничного слоя в динамических уравнениях для ортотропной полосы введем новые переменные $\eta = x / h$, $\zeta = y / h$, и решение будем искать в виде $Q_{ik} = Q_{ikp}(\eta, \zeta)e^{i\omega t}$, где Q_{ikp} - любая из искомых величин. В результате получим систему уравнений

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{11p}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12p}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho\omega_*^2u_p = 0 , \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12p}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22p}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho\omega_*^2v_p = 0 ,$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_p}{\partial\eta} = a_{11}\sigma_{11p} + a_{12}\sigma_{22p} , \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial v_p}{\partial\zeta} = a_{12}\sigma_{11p} + a_{22}\sigma_{22p} , \tag{1.4}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_p}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial v_p}{\partial\eta} = a_{66}\sigma_{12p} ,$$

где a_{ik} - коэффициенты упругости, ρ - плотность слоев, $u_p = u / l$, $v_p = v / l$ - безразмерные компоненты вектора перемещения, $\omega_*^2 = \omega^2h^2$. Решение системы (1.4) будем искать в виде

$$Q_{ikp} = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{q_{ik}+s}Q_{ikp}^{(s)}(\zeta)e^{-\lambda\eta} \tag{1.5}$$

где q_{ik} характеризуют асимптотические порядки искомых величин. Считается, что $Q_{ikp}^{(m)} = 0$, если $m < 0$. Подставив (1.5) в (1.4), получим непротиворечивую систему относительно $Q_{ikp}^{(s)}$, если $q_{ik} = -1$ для напряжений, $q_{ik} = 0$ для перемещений. В результате имеем

$$-\lambda\sigma_{11p}^{(s)} + \frac{d\sigma_{12p}^{(s)}}{d\zeta} + \rho\omega_*^2u_p^{(s)} = 0, \quad -\lambda\sigma_{12p}^{(s)} + \frac{d\sigma_{22p}^{(s)}}{d\zeta} + \rho\omega_*^2v_p^{(s)} = 0,$$

$$-\lambda u_p^{(s)} = a_{11}\sigma_{11p}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22p}^{(s)}, \quad \frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta} = a_{12}\sigma_{11p}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22p}^{(s)}, \tag{1.6}$$

$$\frac{du_p^{(s)}}{d\zeta} - \lambda v^{(s)} = a_{66}\sigma_{12p}^{(s)}.$$

Из этой системы напряжения выражаются через компоненты вектора перемещения по формулам

$$\sigma_{12p}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{du_p^{(s)}}{d\zeta} - \lambda u_p^{(s)}\right], \quad \sigma_{11p}^{(s)} = -\frac{1}{\Delta}\left[a_{22}\lambda u_p^{(s)} + a_{12}\frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta}\right], \tag{1.7}$$

$$\sigma_{22p}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{11}\frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta} + a_{12}\lambda u_p^{(s)}\right], \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

а для определения перемещений $u_p^{(s)}$, $v_p^{(s)}$ получается система

$$l_{11}u_p^{(s)} - l_{12}v_p^{(s)} = 0, \; l_{22}v_p^{(s)} - l_{12}u_p^{(s)} = 0 \;, \tag{1.8}$$

где операторы l_{ik} имеют вид

$$l_{12} = \lambda(\Delta - a_{12}a_{66})\frac{d}{d\zeta}\;, \quad l_{22} = a_{11}a_{66}\frac{d^2}{d\zeta^2} + \Delta\,(\lambda^2 + a_{66}\omega_*{}^2\rho)\;,$$

$$l_{11} = \Delta\frac{d^2}{d\zeta^2} + (\lambda^2 a_{22} + \omega_*{}^2\rho\Delta)a_{66}\;. \tag{1.9}$$

Из системы (1.8) следует уравнение $(l_{11}l_{22} - l_{12}^2)u_p^{(s)} = 0$, которое в развернутом виде имеет вид

$$a_{11}\frac{d^4u_p^{(s)}}{d\zeta^4} + \left[(\Delta + a_{11}a_{66})\omega_*{}^2\rho + (a_{66} + 2a_{12})\lambda^2\right]\times$$

$$\times\frac{d^2u_p^{(s)}}{d\zeta^2} + (\lambda^2 a_{22} + \omega_*{}^2\rho\Delta)(\lambda^2 + a_{66}\omega_*{}^2\rho)u_p^{(s)} = 0\;, \tag{1.10}$$

а для $v_p^{(s)}$, $\sigma_{11p}^{(s)}$, $\sigma_{12p}^{(s)}$, $\sigma_{22p}^{(s)}$ из системы (1.8) и из (1.7) получаются

$$v_p^{(s)} = S_1\frac{d^3u_p^{(s)}}{d\zeta^3} + S_2\frac{du_p^{(s)}}{d\zeta}\;, \; \sigma_{12p}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[(1 - \lambda S_2)\frac{du_p^{(s)}}{d\zeta} - \lambda S_1\frac{d^3u_p^{(s)}}{d\zeta^3}\right],$$

$$\sigma_{11p}^{(s)} = -\frac{1}{\Delta}\left[a_{22}\lambda u_p^{(s)} + a_{12}S_2\frac{d^2u_p^{(s)}}{d\zeta^2} + a_{12}S_1\frac{d^4u_p^{(s)}}{d\zeta^4}\right],$$

$$\sigma_{22p}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[a_{12}\lambda u_p^{(s)} + a_{11}S_2\frac{d^2u_p^{(s)}}{d\zeta^2} + a_{11}S_1\frac{d^4u_p^{(s)}}{d\zeta^4}\right],$$

$$S_1 = -\frac{a_{11}a_{66}}{\lambda(\Delta - a_{12}a_{66})(\lambda^2 + a_{66}\omega_*{}^2\rho)},\qquad (1.11)$$

$$S_2 = -\frac{(\lambda^2((a_{66}+a_{12})^2 - a_{11}a_{22}) + \omega_*{}^2\rho a_{11}a_{66}{}^2)}{\lambda(\Delta - a_{12}a_{66})(\lambda^2 + a_{66}\omega_*{}^2\rho)}.$$

Решением уравнения (1.10) является

$$u_p{}^{(s)} = C_1\cos z_1\lambda\zeta + C_2\sin z_1\lambda\zeta + C_3\cos z_2\lambda\zeta + C_4\sin z_2\lambda\zeta,$$

$$z_{1,2}^2 = ((\Delta + a_{11}a_{66})\mu^2\rho + a_{66} + 2a_{12} \pm \sqrt{D})/(2a_{11}),\quad \mu = \omega_*/\lambda, \qquad (1.12)$$

$$D = (\Delta - a_{11}a_{66})^2\mu^4\rho^2 + (2(a_{66} + 2a_{12})(\Delta + a_{11}a_{66}) -$$

$$- 4a_{11}a_{22}a_{66} - 4a_{11}\Delta)\mu^2\rho + (a_{66} + 2a_{12})^2 - 4a_{11}a_{22}. \qquad (1.13)$$

Подставив (1.12) в (1.11) и в граничные условия (1.1), (1.2), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4, для существования нетривиальных решений которой необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю, вследствие чего получается трансцендентное уравнение (1.14), откуда определяется показатель экспоненты λ

$$(B_2D_1 + B_1D_2)\sin 2\lambda(z_1 - z_2) + (B_2D_1 - B_1D_2)\sin 2\lambda(z_1 + z_2) = 0,$$

$$B_i = 1/\Delta\,(a_{11}a_iz_i + a_{12}),\quad D_i = 1/a_{66}(z_i + A_i), \qquad (1.14)$$

$$A_i = \frac{a_{11}a_{66}z_i{}^3 - ((a_{66}+a_{12})^2 - a_{12}a_{22} + \mu^2\rho a_{11}a_{66}{}^2)z_i}{(a_{12}a_{66} - \Delta)(1 + a_{66}\mu^2\rho)},\quad i = 1, 2.$$

В частности, для пограничного слоя изотропной полосы имеем уравнение

$$(1 + Q)\sin 2\lambda(z_1 - z_2) + (1 - Q)\sin 2\lambda(z_1 + z_2) = 0 \ ,$$

$$z_1^2 = 1 + \mu^2\rho\,\frac{1 - \nu^2}{E} \ , \quad z_2^2 = 1 + 2\mu^2\rho\,\frac{1 + \nu}{E} \ , \quad Q = \frac{(1 + z_2^2)^2}{4 z_1 z_2} \ , \qquad (1.15)$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости.

В уравнение (1.14) в качестве параметра входит ω, и каждому его значению из (1.3) будет соответствовать счетное множество λ. В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться теми значениями λ, у которых $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Таким образом, каждому собственному значению ω соответствует свое семейство пограничных функций. В табл. 1,2 приведены некоторые первые значения λ для ортотропной полосы из материала СВАМ 10:1 с характеристиками $a_{11} = 2.614 \cdot 10^{-11}$Па$^{-1}$, $a_{22} = 5.669 \cdot 10^{-11}$Па$^{-1}$, $a_{66} = 19.234 \cdot 10^{-11}$Па$^{-1}$, $a_{12} = -0.575 \cdot 10^{-11}$Па$^{-1}$, в табл. 3,4 - для изотропной полосы из железобетона с характеристиками $E = 206 \cdot 10^8$ Па, $\nu = 0.2$.

Из (1.14) или (1.15), определив λ, по формулам (1.11), (1.12) определяются все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения погранслоя.

Как следует из (1.5), величины погранслоя затухают экспоненциально, а показатели экспонент определяются из (1.14) или (1.15). Из табл. 1-4 следует, что реальные части показателей экспонент возрастают достаточно быстро и в прикладных вычислениях можно ограничиться первыми несколькими корнями этих уравнений.

Сопряжение решений пограничного слоя и внутренней задачи, в частности, можно осуществить методом наименьших квадратов или методом граничной коллокации [10, 11].

Таблица 1

$\omega_{*_s} = \pi n / \sqrt{a_{66}\rho}$		
n=1	λ_1=0.24019+1.0318 i	λ_3=2.211749
	λ_2=1.404897	λ_4=2.7294+0.23825 i
n=2	λ_1=1.89794	λ_3=3.417765
	λ_2=2.95038+0.1825 i	λ_4=4.22615
n=3	λ_1=2.308669	λ_3=4.097049
	λ_2=3.12928+0.2095 i	λ_4=4.912268
n=4	λ_1=2.7104+0.19626	λ_3=4.64799
	λ_2=3.65966	λ_4=5.51521
n=5	λ_1=2.6232+0.06136 i	λ_3=5.135879
	λ_2=4.091669	λ_4=6.05979

Таблица 2

$\omega_{*_p} = \pi(2n-1) / (4\sqrt{A_{11}\rho})$		
n=1	λ_1=1.025788	λ_3=2.385279
	λ_2=1.725649	λ_4=3.043771
n=2	λ_1=0.519403	λ_3=2.53485
	λ_2=1.72838	λ_4=3.260538
n=3	λ_1=1.048913	λ_3=3.213979
	λ_2=2.314626	λ_4=4.007347
n=4	λ_1=1.530886	λ_3=3.829277
	λ_2=2.854538	λ_4=4.682892
n=5	λ_1=2.00026	λ_3=4.406754
	λ_2=3.36996	λ_4=5.313287

Таблица 3

$\omega_{*_s} = \pi n / \sqrt{a_{66}\rho}$		
n=1	λ_1=0.38976	λ_3=5.2191+0.96275 i
	λ_2=3.3477+0.86728 i	λ_4=6.9429+1.02561 i
n=2	λ_1=4.30501+0.3295 i	λ_3=7.238734+0.66865 i
	λ_2=5.72599	λ_4=9.14279+0.89291 i
n=3	λ_1=3.76542	λ_3=8.260449+0.81639 i
	λ_2=5.8695+0.61608 i	λ_4=10.34442+0.81351 i
n=4	λ_1=3.208627	λ_3=9.099352+0.546398 i
	λ_2=6.4035+0.7167 i	λ_4=10.784599
n=5	λ_1=2.002788	λ_3=8.920408
	λ_2=6.78042+0.43728 i	λ_4=10.6919+0.54696 i

Таблица 4

$\omega_{*p} = \pi(2n-1) / (4\sqrt{A_{11}\rho})$		
n=1	λ_1=2.46428+0.78908 i	λ_3=5.7563+0.96983 i
	λ_2=4.13907+0.8955 i	λ_4=7.3539+1.02711 i
n=2	λ_1=2.88329+0.76794 i	λ_3=6.73414+1.009398 i
	λ_2=4.93595+0.930545 i	λ_4=8.44149+1.06455 i
n=3	λ_1=4.40205+0.18667 i	λ_3=7.289697+0.707421 i
	λ_2=5.678714	λ_4=9.18057+0.909667 i
n=4	λ_1=3.941194+0.47119 i	λ_3=8.84117+0.75743 i
	λ_2=6.65485+0.7855 i	λ_4=10.8455+0.58944 i
n=5	λ_1=5.3607+0.50225 i	λ_3=8.9335+0.50455 i
	λ_2=7.413001	λ_4=11.12814+0.81348 i

Институт механики НАН РА

Литература

1. *Агаловян Л. А.* - В сб.: Юбил. научн. конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри, 1994.
2. *Агаловян М. Л.* - ДНАН Армении. 1996. Т. 96. № 2-4. С. 23-28.
3. *Агаловян М. Л.* - Уч. зап. ЕГУ. 1997. N 2. (187).
4. *Гулгазарян Л. Г.* - Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 4.
5. *Агаловян Л. А., Саркисян Л. С.* - Тр. XVIII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. РФ. Саратов. Т. 1. 1997.
6. *Саркисян Л. С.* - ДНАН Армении. 1997. Т. 97. № 3. С. 19-25.
7. *Гулгазарян Л. Г.* - Материалы респ. конф. молодых ученых. Ереван, 1999.
8. *Агаловян М. Л.* - В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван, 1997.
9. *Гулгазарян Л. Г.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т. 53. № 2.
10. *Агаловян Л. А.* - Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997.
11. *Лурье А. Н.* - Теория упругости. М.: Наука, 1970.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Լ. Գ. Ղուլղազարյան

Օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումներում սահմանային շերտի բնույթը

Դիտարկվում են սահմանային շերտի գոտում օրթոտրոպ շերտի սեփական տատանումները: Ստացված է համապատասխան դինամիկական խնդրի անալիտիկ լուծումը սահմանային շերտի համար: Դուրս է բերված բնութագրիչ հավասարում, որի արմատներով նկարագրվում է սահմանային շերտի մեծությունների մարման արագությունը: Ցույց է տրված, որ սեփական տատանումների յուրաքանչյուր հաճախությանը համապատասխանում է սահմանային ֆունկցիաների առանձին դաս: Թվային եղանակով որոշված են սահմանային շերտի մարման արագության բնութագրիչները: