УДК 539.3

А.П. Мкртчян

Локализованные изгибные волны на стыке пластин

(Представлено академиком С.А. Амбарцумяном 29/VIII 2000)

В данной работе исследуется задача об изгибных волнах, бегущих вдоль линии контакта двух упругих пластин и локализованных вблизи нее. Рассматриваемые волны являются изгибным аналогом волн Стоунли - упругих поверхностных волн, распространяющихся вдоль линии контакта двух упругих тел [1]. Для двух различных условий контакта определены необходимые и достаточные условия существования локализованной изгибной волны в зависимости от упругих характеристик материала пластин.

Возможность существования поверхностной изгибной волны у свободного края изотропной пластинки была показана в работах [2,3] в рамках классической теории пластин, основанной на гипотезе Киргхофа. Аналогичная задача для ортотропной пластинки рассмотрена в [4].

1. Рассмотрим две различные упругие пластины, неограниченно протяженные вдоль оси x прямоугольной декартовой системы координат (x, y). Первая пластинка занимает область y < 0, вторая - область y > 0. Вдоль прямой y = 0 пластинки находятся в условиях упругого контакта. Пластинки характеризуются жесткостью D_j, плотностью p_j, коэффициентом Пуассона ν_j, толщиной h_j (j = 1;2).

Исследуется вопрос существования изгибных поперечных волн, бегущих вдоль линии контакта и локализованных в окрестности линии контакта. Согласно теории тонких пластин, основанной на гипотезе Киргхофа, уравнение поперечных колебаний пластинки без учета инерции вращения относительно прогиба W имеет вид

$$\Delta\Delta W_j + 2p_j h_j \frac{\delta W_j}{\delta t^2} = 0, \tag{1.1}$$

где Δ - двумерный оператор Лапласа.

Требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию угасания волн на бесконечности.

$$\lim W_1(x,y,t) = 0, \qquad y \to -\infty,$$
$$\lim W_2(x,y,t) = 0, \qquad y \to \infty,$$

а также условиям контакта на прямой y = 0.

Вначале в качестве условий контакта используем известные в строительной механике условия, когда на линии контакта y = 0 расположены шарниры:

$$w_1 = w_2 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0, \tag{1.4}$$

$$D_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2-\nu_1)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = D_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + (2-\nu_2)\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right) \tag{1.5}$$

Условия (1.3), (1.4) представляют собой равенства нулю изгибающих моментов, условие (1.5) - равенство обобщенных перерезывающих сил контактирующих пластин. Представляя решение в виде бегущей волны с частотой ω и волновым числом k

$$w_j(x,y,t) = w_{0j}(y) exp(i\omega y - kx),$$

получим следующее уравнение относительно амплитуды изгибных волн:

$$\frac{d^4 w_{oj}}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 w_{oj}}{dy^2} + k^4\left(1 - \frac{\eta^2}{\eta_j^2}\right) w_{oj} = 0. \tag{1.6}$$

Здесь $\eta = \frac{\omega}{k}$ есть неизвестная фазовая скорость локализованной волны, $\eta_j = \sqrt{\frac{D_j k^4}{2p_j h_j}}$ - фазовые скорости одномерных изгибных волн пластин. Из общих решений уравнений (1.6) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуд при $y \to \pm\infty$

$$w_{01} = A_1 \exp\left(ky\sqrt{1 + \frac{\eta}{\eta_1}}\right) + B_1 \exp\left(ky\sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_1}}\right),$$

$$w_{02} = A_2 \exp\left(-ky\sqrt{1 + \frac{\eta}{\eta_2}}\right) + B_1 \exp\left(-ky\sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_2}}\right).$$

Используем условия контакта (1.2)-(1.5) при $y = 0$

$$w_{01} = w_{02},$$

$$\frac{d^2 w_{01}}{dy^2} - \nu_1 k^2 w_{01} = 0,$$

$$\frac{d^2 w_{02}}{dy^2} - \nu_2 k^2 w_{02} = 0,$$

$$D_1\left[\frac{d^3 w_{01}}{dy^3} - (2 - \nu_1)k^2 \frac{dw_{01}}{dy}\right] = D_2\left[\frac{d^3 w_{02}}{dy^3} - (2 - \nu_2)k^2 \frac{dw_{02}}{dy}\right],$$

получим следующее дисперсионное уравнение относительно η- неизвестной фазовой скорости локализованной волны:

$$F(\eta) \equiv F_{01}\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right) + F_{02}\left(\frac{\eta}{\eta_2}\right) = 0, \tag{1.7}$$

где функция $F_{0j}\left(\frac{\eta}{\eta_j}\right)$ имеет вид

$$F_{0j}\left(\frac{\eta}{\eta_j}\right) = D_j\left[\frac{(1-\nu_j)^2 + \left(\frac{\eta}{\eta_j}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{\eta}{\eta_j}} + \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_j}}} - (1 - \nu_j)\left(\sqrt{1 + \frac{\eta}{\eta_j}} + \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_j}}\right)\right].$$

Функция $\sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_j}} + \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_j}}$ в интервале $\eta \in [0, \min(\eta_1, \eta_2)]$ является монотонно убывающей и, следовательно, в этом же интервале функция F(η) является монотонно возрастающей. В левом конце интервала η = 0 имеем

$$F(0) = -\frac{1}{2}D_1(1-\nu_1)(3+\nu_1) - \frac{1}{2}D_2(1-\nu_2)(3+\nu_2) < 0. \qquad 1.8$$

Так как функция F(η) является монотонно возрастающей, из условия (1.8) имеем, что для существования корня дисперсионного уравнения (1.7) необходимо и достаточно, чтобы

$$F[\min(\eta_1\eta_2)] > 0. \qquad 1.9$$

Таким образом, при выполнении неравенства (1.9) мы имеем случай существования одной-единственной локализованной изгибной волны с фазовой скоростью 0 < η < min (η_1, η_2). В случае одинаковых материалов мы получим уравнение, совпадающее с уравнением для пластинки со свободным краем [2,3].

Пусть

$$\beta = \frac{D_1 p_2 h_2}{D2 p_1 h_1} < 1.$$

Тогда условие существования локализованной изгибной волны имеет вид

$$\frac{D_1\nu_1^2}{\sqrt{2}} + D_2\,\frac{\beta^2 - 1 + \nu_2^2 - 2(1-\nu_2)\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta} + \sqrt{1-\beta}} > 0.$$

При β<<1 имеем, в частности, следующее условие:

$$\sqrt{2}D_1\nu_1^2 - D_2(1-\nu_2)(3+\nu_2) > 0.$$

2. Рассмотрим теперь эту задачу при условиях полного упругого контакта. В этом случае условия на прямой y = 0 имеют вид:

$$w_1 = w_2 \qquad 2.1$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \qquad 2.2$$

$$D_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = D_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right), \qquad 2.3$$

$$D_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2-\nu_1)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = D_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + (2-\nu_2)\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right). \qquad 2.4$$

Здесь условие (2.3) представляет собой равенство изгибных моментов контактирующих пластин, условие (2.4) - равенство обобщенных перерезывающих сил контактирующих пластин.

В [5] была исследована аналогичная задача, однако в этой работе вместо условия равенства обобщенных перерезывающих сил контактирующих пластин было использовано неточное условие равенства перерезывающих сил.

Повторяя предыдущий ход решения, для фазовой скорости локализованной изгибной волны получим следующее дисперсионное уравнение:

$$R(\eta) \equiv R_1\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right) + R_2\left(\frac{\eta}{\eta_2}\right) + R_{12}(\eta) = 0,$$

где $R_j\left(\frac{\eta}{\eta_j}\right)$, $R_{12}(\eta)$ есть следующие функции:

$$R_j\left(\frac{\eta}{\eta_j}\right)=D_j\left[\left(\frac{\eta}{\eta_j}\right)^2-1+\nu_j^2-2\left(1-\nu_j\right)\sqrt{1-\left(\frac{\eta}{\eta_j}\right)^2}\right],$$

$$R_{12}(\eta)=-D_1D_2\left[2\left(\sqrt{1-\frac{\eta^2}{\eta_1^2}}+\nu_1\right)\left(\sqrt{1-\frac{\eta^2}{\eta_2^2}}+\nu_2\right)+\left(\sqrt{1+\frac{\eta}{\eta_1}}+\sqrt{1-\frac{\eta}{\eta_1}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{\eta}{\eta_2}}+\sqrt{1-\frac{\eta}{\eta_2}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{\eta^2}{\eta_1^2}}+\sqrt{1-\frac{\eta^2}{\eta_2^2}}\right)\right].$$

В точке $\eta = 0$ имеем

$$R(0)=-D_1\left(3-2\nu_1-\nu_1^2\right)-D_2\left(3-2\nu_2-\nu_2^2\right)-6D_1D_2\left(1+\nu_1\right)\left(1+\nu_2\right)<0.$$

Функции $\left(\sqrt{1+\frac{\eta}{\eta_j}}+\sqrt{1-\frac{\eta}{\eta_j}}\right);\sqrt{1-\frac{\eta}{\eta_j}}$ - монотонно убывающие функции в интервале $\eta \in [0, \min(\eta_1, \eta_2)]$, и, следовательно, в этом же интервале функция $R(\eta)$ является монотонно возрастающей функцией.

Таким образом, условие $R[\min(\eta_1,\eta_2)] > 0$ будет являться необходимым и достаточным условием существования локализованной изгибной волны.

Институт механики НАН РА

Литература

1. *Stonely R.* - Proc. Roy. Soc. London. 1924. V. 106. P. 416-429.
2. *Коненков К.Ю.* - Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 124-126.
3. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* - ПМ. Т. 30(40). №2, С. 61-68(1994)
4. *Багдасарян Р.А., Казарян К.Б.* - ДАН АрмССР. 1986. Т. 83. № 2. С. 69-72.
5. *Зильберглейт А.С., Суслова И.Б.* В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела. Ереван: Изд-во АН Армении, 1981. С. 128-133.

Հ.Պ. Մկրտչյան

Տեղայնացված ծռման ալիքները սալերի կցման տեղում

Սույն աշխատանքում հետազոտվում է երկու առաձգական սալերի կոնտակտի գծի երկայնքով վազող և նրա շրջակայքում տեղայնացված ծռման ալիքների խնդիրը։

Կոնտակտի երկու տարբեր պայմանների դեպքում որոշված են տեղայնացված ծռման ալիքների գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները՝ կախված սալերի նյութի առաձգական բնութագրիչներից։