

Академик Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян, А. В. Саакян

**К решению второй краевой задачи для двухслойной
полосы из сжимаемого и несжимаемого слоев
с учетом температурного поля**

(Представлено 23/III 2000)

Асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы для определения напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы из сжимаемого и несжимаемого слоев. Считается, что на продольных краях полосы заданы кинематические условия. Задача, в частности, моделирует работу резинометаллических сейсмоизоляторов. В качестве иллюстрации приведены решения ряда прикладных задач.

1. Имеем двухслойную полосу $\Omega = \{x, z : -h_e \leq z \leq h, -l \leq x \leq l, h+h_e \ll 2l\}$. Слой $0 \leq z \leq h$ - из сжимаемого материала, а слой $-h_e \leq z \leq 0$ - из несжимаемого. Считается, что продольным краям полосы сообщены перемещения:

$$\begin{aligned} u_x(x, z = -h_e) &= u_x^-(x), \quad u_z(x, z = -h_e) = u_z^-(x), \\ u_x(x, z = h) &= u_x^+(x), \quad u_z(x, z = h) = u_z^+(x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

а между слоями имеет место полный контакт:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, z = 0) &= \sigma_{zz}^e(x, z = 0), \quad \sigma_{xz}(x, z = 0) = \sigma_{xz}^e(x, z = 0), \\ u_x(x, z = 0) &= u_x^e(x, z = 0), \quad u_z(x, z = 0) = u_z^e(x, z = 0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем всем величинам несжимаемого слоя приписывается индекс e .

В общем случае считается, что на двухслойную полосу действует также температурное поле.

Для решения задачи воспользуемся рекуррентными формулами для сжимаемого слоя [1,2]:

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon \chi \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_1, \quad \chi_u = -1, \quad \chi_\sigma = 0, \\ \sigma_{zz}^{(s)} &= \sigma_{zz0}^{(s)} + \sigma_{zz*}^{(s)}, \quad \sigma_{zz*}^{(s)} = - \int_0^\zeta \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} d\zeta, \\ \sigma_{xz}^{(s)} &= \sigma_{xz0}^{(s)} + \sigma_{xz*}^{(s)}, \quad \sigma_{xz*}^{(s)} = - \int_0^\zeta \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} d\zeta, \\ \sigma_{xx}^{(s)} &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}^{(s)} + \frac{2G}{1-\nu} \frac{\partial \bar{u}_x^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} G \alpha \Theta^{(s)}, \\ \bar{u}_x^{(s)} &= \bar{u}_{x0}^{(s)} + \frac{1}{G} \zeta \sigma_{xz0}^{(s)} + \bar{u}_{x*}^{(s)}, \\ \bar{u}_{x*}^{(s)} &= \int_0^\zeta \left(\frac{1}{G} \sigma_{xz*}^{(s)} - \frac{\partial \bar{u}_z^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta, \\ \bar{u}_z^{(s)} &= \bar{u}_{z0}^{(s)} + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \zeta \sigma_{zz0}^{(s)} + \bar{u}_{z*}^{(s)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\bar{u}_{z^*}^{(s)} = \int_0^\zeta \left(\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz^*}^{(s)} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \bar{u}_x^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \Theta^{(s)} \right) d\zeta,$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h+h_e}, \quad \varepsilon = \frac{h+h_e}{l}, \quad \bar{u}_x = u_x/l, \quad \bar{u}_z = u_z/l,$$

$$\zeta_1 = \frac{h}{h+h_e}, \quad \Theta = \varepsilon^{-1} \sum_{s=0}^S \Theta^{(s)}(\xi, \zeta),$$

а для несжимаемого слоя - следующими рекуррентными формулами, по модели Дюгамеля-Неймана учитывающими влияние температурного поля:

$$Q^{e=\varepsilon\chi} = \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{e(s)}(\xi, \zeta), \quad -\zeta_e \leq \zeta \leq 0,$$

$$\chi_{\sigma_{xx}^e} = \chi_{\sigma_{zz}^e} = -3, \quad \chi_{\sigma_{xz}^e} = -2, \quad \chi_{u_x^e} = -1, \quad \chi_{u_z^e} = 0,$$

$$\sigma_{zz}^{e(s)} = \sigma_{zz0}^{e(s)} + \sigma_{zz^*}^{e(s)}, \quad \sigma_{zz^*}^{e(s)} = - \int_0^\zeta \frac{\partial \sigma_{xz}^{e(s-2)}}{\partial \xi} d\zeta,$$

$$\sigma_{xx}^{e(s)} = \sigma_{zz}^{e(s)} + 4G_e \frac{\partial \bar{u}_x^{e(s-2)}}{\partial \xi} - 6G_e \alpha_e \Theta^{(s-2)},$$

$$\sigma_{xz}^{e(s)} = \sigma_{xz0}^{e(s)} - \zeta \sigma_{zz0}^{e(s)} + \sigma_{xz^*}^{e(s)},$$

$$\sigma_{xz^*}^{e(s)} = \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{zz^*}^{e(s)}}{\partial \xi} + 4G_e \frac{\partial^2 \bar{u}_x^{e(s-2)}}{\partial \xi^2} - 6G_e \alpha_e \frac{\partial \Theta^{(s-2)}}{\partial \xi} \right) d\zeta,$$

$$\bar{u}_x^{e(s)} = \bar{u}_{x0}^{e(s)} + \frac{1}{G_e} \zeta \sigma_{xz0}^{e(s)} - \frac{1}{2G_e} \zeta^2 \sigma_{zz0}^{e(s)} + \bar{u}_{x^*}^{e(s)},$$

$$\bar{u}_{x^*}^{e(s)} = \int_0^\zeta \left(\frac{1}{G_e} \sigma_{xz^*}^{e(s)} - \frac{\partial \bar{u}_z^{e(s-2)}}{\partial \xi} \right) d\zeta,$$

(1.4)

$$\bar{u}_z^{e(s)} = \bar{u}_{z0}^{e(s)} - \zeta \sigma_{xz0}^{e(s)} - \frac{1}{2G_e} \zeta^2 \sigma_{xz0}^{e(s)} + \frac{1}{6G_e} \zeta^3 \sigma_{zz0}^{e(s)} + \bar{u}_{z^*}^{e(s)},$$

$$\bar{u}_{z*}^{e(s)} = - \int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \bar{u}_{x*}^{e(s)}}{\partial \zeta^e} - 3\alpha_e \Theta^{(s)} \right) d\zeta.$$

где точки над буквами означают производные соответствующих порядков по ζ .

В (1.3), (1.4) неизвестными остаются величины с нулевым индексом.

Используя формулы (1.3), (1.4) и удовлетворив условиям (1.1), (1.2), можно определить эти величины, а следовательно, решить внутреннюю задачу.

Приведем формулы для вычисления напряжений и перемещений, соответствующие первым двум шагам итерации, обеспечивающим точность $O(\varepsilon^2)$:

а) сжимаемый слой ($0 \leq z \leq h$)

$$\sigma_{zz} = \sigma, \quad \sigma_{xx} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \frac{h\alpha}{M} \Theta,$$

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{P+M} \left[u_x^+ - u_x^- + h u_z^+ + h_e u_z^- - \frac{1}{6} P h_e^3 \ddot{\sigma} + \left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \dot{\sigma} \right] - \left(\frac{h_e}{2} + z \frac{\nu}{1-\nu} \right) \dot{\sigma},$$

$$u_x = u_x^+ + (h-z) u_z^+ + \frac{z-h}{h} M \frac{h u_z^+ + h_e u_z^-}{P+M} +$$

$$+ \frac{z-h}{h} \frac{M}{P+M} \left[u_x^+ - u_x^- - \frac{1}{6} P h_e^3 \sigma + \left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \right. \quad (1.5)$$

$$\left. - \frac{z-h}{h} h_e \frac{M}{2} \dot{\sigma} + \frac{M}{2h} \frac{\nu}{1-\nu} (h^2 - z^2) \dot{\sigma} - \frac{M(1-2\nu)}{4h(1-\nu)} (z-h)^2 \dot{\sigma} \right],$$

$$u_z = u_x^+ + (z-h) \frac{1-2\nu}{2h(1-\nu)} M \sigma + (z-h) \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \Theta,$$

$$M = \frac{h}{G}, P = \frac{h_e}{G_e};$$

б) несжимаемый слой ($-h_e \leq z \leq 0$)

$$\sigma_{zz}^e = \sigma + \frac{z}{2} (z + h_e) \ddot{\sigma},$$

$$\sigma_{xx}^e = \sigma - \frac{3}{2} (z^2 + z h_e) \ddot{\sigma} - 6 h_e \alpha_e \frac{\Theta}{P},$$

$$\sigma_{xz}^e = \frac{1}{P+M} \left[u_x^+ - u_x^- - \frac{1}{6} P h_e^3 \ddot{\sigma} + h u_z^+ + h_e u_z^- + \left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \dot{\sigma} \right] + \left(\frac{z^3}{2} + \frac{3}{4} z^2 h_e \right) \ddot{\sigma} - \left(z + \frac{h_e}{2} \right) \dot{\sigma},$$

$$u_x^e = u_x^- - (z + h_e) u_z^- + \frac{P}{h_e} (z + h_e) \frac{h u_z^+ + h_e u_z^-}{P+M} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{z+h_e}{h_e} \frac{P}{P+M} \left[u_x^+ - u_x^- - \frac{Ph_e^3}{6} \sigma - \left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \right] \sigma \quad (1.6) \\
& + \frac{P}{12h_e} (z+2h_e)(z^3+h_e^3) \sigma - \frac{P}{2h_e} z(z+h_e) \sigma, \\
& u_z^e = u_z^- + P \left[\frac{z^2-h_e^2}{4} + \frac{z^3+h_e^3}{6h_e} \right] \sigma + 3(z+h_e)\alpha_e \Theta,
\end{aligned}$$

где σ - решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}
& \sigma - k^2 \sigma = -k^2 W, \\
& k^2 = \frac{6(1-2\nu)}{h_e^2(1-\nu)} \frac{M}{P}, \\
& W = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{u_z^+ - u_z^- - \left(3h_e\alpha_e + h\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \Theta}{M}, \quad (1.7)
\end{aligned}$$

удовлетворяющее интегральным граничным условиям на торцах $x = \pm l$ полосы

$$\int_{-h_p}^h \sigma_{xx}(x = \pm l, z) dz = 0. \quad (1.8)$$

Этим решением при $u_z^+ - u_z^- = ax + b$ является

$$\begin{aligned}
& \sigma = A \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} kl} + B \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl} + W, \\
& A = C \left[\frac{b - \left(3h_e\alpha_e + h\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \Theta}{T-H} \right], \\
& B = C \left(T-H \frac{al}{M} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\frac{\nu}{1-\nu} h + h_e + k^2 \frac{h_e^3}{4}}, \\
H &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left| \frac{\nu}{1-\nu} h + h_e \right|, \\
T &= \frac{2\alpha(1+\nu)h^2\Theta}{M(1-\nu)} + \frac{6h^2\alpha_e\Theta}{P}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

2. В качестве приложения приведем решения некоторых прикладных задач.

а) Продольным краям полосы сообщены постоянные нормальные перемещения, изменение температурного поля также постоянно:

$$u_z^\pm = \text{const}, \quad u_x^\pm = 0, \quad \Theta = \text{const}. \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.5)-(1.9), получим:
для сжимаемого слоя ($0 \leq z \leq h$)

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \sigma, \quad \sigma_{xx} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \frac{h\alpha}{M} \Theta, \\
\sigma_{xz} &= \frac{1}{P+M} \left[\left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{1}{6} Ph_e^3 \sigma \right] - \left[\frac{h_e}{2} + z \frac{\nu}{1-\nu} \right] \sigma, \\
u_x &= \frac{z-h}{h} \frac{M}{P+M} \left[\left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{1}{6} Ph_e^3 \sigma \right] - \\
&\quad - \frac{z-h}{h} h_e \frac{M}{2} \sigma + \frac{M}{2h} \frac{\nu}{1-\nu} (h^2 - z^2) \sigma - \frac{M(1-2\nu)}{4h(1-\nu)} (z-h)^2 \sigma, \\
u_z &= u_z^+ + (z-h) \frac{1-2\nu}{2h(1-\nu)} M \sigma + (z-h) \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \Theta;
\end{aligned} \tag{2.2}$$

для несжимаемого слоя ($-h_e \leq z \leq 0$)

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^e &= \sigma + \frac{z}{2} (z + h_e) \ddot{\sigma}, \\
\sigma_{xx}^e &= \sigma - \frac{3}{2} z (z + h_e) \ddot{\sigma} - 6 \frac{h_e \alpha_e}{P} \Theta, \\
\sigma_{xz}^e &= \frac{1}{P+M} \left[\left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{1}{6} Ph_e^3 \sigma \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{z^3}{2} + \frac{3}{4} z^2 h_e \right) \left(\frac{\sigma}{2} - \left(z + \frac{h_e}{2} \right) \right) \cdot \sigma, \\
& u_x^e = \frac{(z+h_e)P}{h_e(P+M)} \left[\left(\frac{2h_e+h}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{P}{6} h_e^3 \sigma \right] + \\
& + \frac{P}{12h_e} (z+2h_e)(z^3+h_e^3) \sigma - \frac{P}{2h_e} z(z+h_e) \sigma, \\
& u_z^e = u_z^- + P \left[\frac{z^2-h_e^2}{4} + \frac{z^3+h_e^3}{6h_e} \right] \sigma + 3(z+h_e)\alpha_e \Theta.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для этого случая в формуле (1.9) для σ необходимо принять $a = 0$, $b = u_z^+ - u_z^-$.

Деформированное состояние полосы представлено на рис. 1.

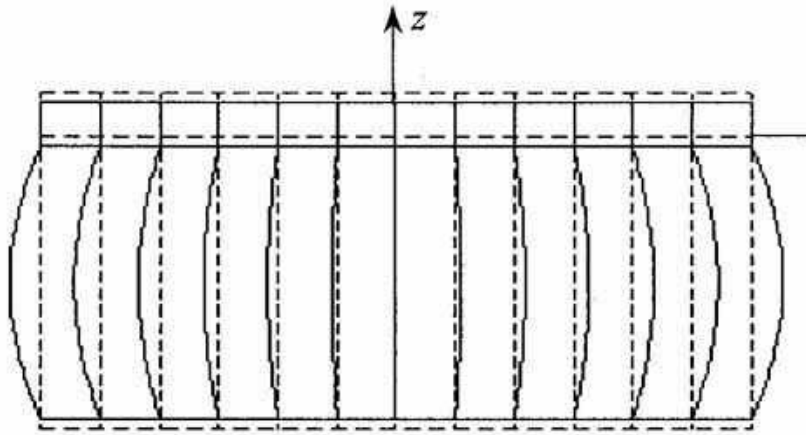


Рис. 1

б) Одной из продольных сторон полосы сообщены нормальные перемещения, меняющиеся линейно по длине балки, изменение температурного поля постоянно:

$$u_z^- = 0, \quad u_z^+ = \alpha x + b, \quad u_x^\pm = 0, \quad \Theta = \text{const}. \tag{2.4}$$

Компоненты σ_{zz} , σ_{xx} , u_z , σ_{zz}^e , σ_{xx}^e , u_z^e определяются по формулам (2.2), (2.3), а формулы для вычисления σ_{xz} , u_x , σ_{xz}^e , u_x^e имеют вид

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{P+M} \left[ah + \left(2h_e + h \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{1}{6} Ph_e^3 \sigma \right] - \left(\frac{h_e}{2} + z \frac{\nu}{1-\nu} \right) \sigma, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
u_x^e = & (h-z) \frac{aP}{P+M} + \frac{(z-h)M}{h(P+M)} \left[\left(\frac{2h_e + h}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{1}{6} Ph_e^3 \sigma \right] + \\
& + \frac{M}{2h} \frac{\nu}{1-\nu} (h^2 - z^2) \sigma - \frac{M(1-2\nu)}{4h(1-\nu)} (z-h)^2 \sigma - \frac{z-h}{h} h_e \frac{M}{2} \sigma, \\
\sigma_{xz}^e = & \frac{1}{P+M} \left[ah + \left(\frac{2h_e + h}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{1}{6} Ph_e^3 \sigma \right] + \left[\frac{z^3}{2} + \frac{3}{4} z^2 h_e \right] \sigma - \left[z + \frac{h_e}{2} \right] \sigma, \\
u_x^e = & (z+h_e) \frac{ahP}{h_e(P+M)} + \frac{(z+h_e)P}{h_e(P+M)} \left[\left(\frac{2h_e + h}{1-\nu} \right) \frac{M}{4} \sigma - \frac{P}{6} h_e^3 \sigma \right] + \\
& + \frac{P}{12h_e} (z+2h_e)(z^3 + h_e^3) \sigma - \frac{P}{2h_e} z(z+h_e) \sigma.
\end{aligned}$$

Деформированное состояние полосы изображено на рис. 2.

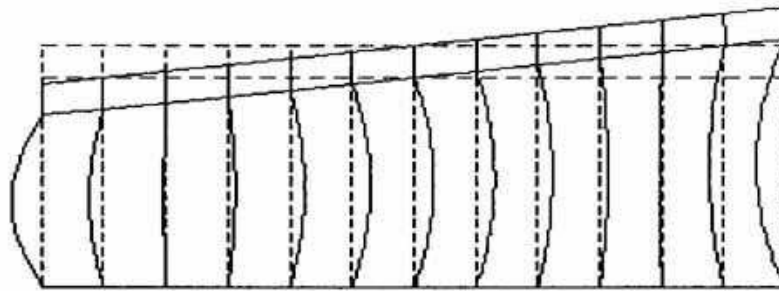


Рис. 2

В заключение отметим тот важный факт, что, когда на лицевых поверхностях полосы или пластины заданы нормальные перемещения, есть принципиальная разница между асимптотиками, соответствующими сжимаемому и несжимаемому материалам [3]. Когда же на лицевых поверхностях заданы другие граничные условия, то асимптотика остается одинаковой для сжимаемого и несжимаемого слоев. Для этих случаев все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения можно вычислить по рекуррентным формулам (1.3), откуда данные несжимаемого слоя будут вытекать, если принять $\nu = [1/2]$.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Агаловян Л. А, Геворкян Р. С. - Тр. IV Всесоюз. симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
2. Агаловян Л. А, Геворкян Р. С. - ПИМ. 1986. Т. 50. В. 2. С. 271-278.
3. Агаловян Л. А, Геворкян Р. С., Саакян А. В. - ДНАН Армении. 1997. Т. 97. № 3. С. 13-18.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Ա. Վ. Սահակյան

**Ջերմաստիճանային դաշտի հաշվառմամբ սեղմելի
և անսեղմելի շերտերից բաղկացած երկշերտի համար
երկրորդ եզրային խնդրի լուծման մասին**

Ասիմպտոտիկ մեթոդով արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր սեղմելի և անսեղմելի շերտերից բաղկացած երկշերտի լարվածա-դեֆորմացիոն դաշտի բաղադրիչները որոշելու համար, երբ հաշվի է առնվում ջերմային դաշտի փոփոխությունը, իսկ երկայնական եզրերում տրված են կինեմատիկական պայմաններ: Որպես արտածված բանաձևերի կիրառություն բերված են լուծումներ, երբ եզրերում տրված ֆունկցիաները հաստատուն են կամ փոփոխվում են գծային օրենքով: Ստացված արդյունքները մասնավորապես կարևորվում են նրանով, որ դիտարկված խնդիրները մոդելավորում են ռետինամետաղական սեյսմամեկուսիչների երկշերտ տարրերի աշխատանքը: