УДК 621.39.1:519.34

А. А. Чубарян

О нижних оценках выводов в системах Фреге с подстановками

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 20/IV 2000)

В работе доказывается, что существуют тавтологии (твт) длины n, для которых и в системах Фреге $\mathfrak{I}$, и в системах Фреге с подстановками $S\mathfrak{I}$ оценки количества формул и общей длины выводов имеют порядок n и n^2 соответственно.

1. Введение. В работах [1] и [2] обсуждается вопрос получения нижних оценок количества шагов выводов в системах Фреге с подстановками. В частности, Басс [1] указывает в качестве открытой проблему получения суперлогаритмической нижней оценки количества шагов выводов в $S\mathfrak{I}$. Ургарт в [2] доказал, что существуют формулы с длиной $O(n)$, количество шагов выводов которых в $S\mathfrak{I}$ не менее $O(n / \log n)$. Однако еще в 1981 г. в качестве некоего вспомогательного результата нами была получена линейная нижняя оценка для количества шагов выводов в классической, интуиционистской и минимальной системах с простыми подстановками исчисления высказываний гильбертовского типа [3]. Эти оценки были получены с использованием введенного в [4] понятия τ-множества, непосредственное применение которого в системах Фреге представляется затруднительным. В настоящей работе для произвольной твт вводится понятие множества существенных подформул, и на его основе доказывается существование последовательности формул длины n, для которых в обеих системах $\mathfrak{I}$ и $S\mathfrak{I}$ количество шагов и длина выводов оцениваются соответственно функциями порядка n и n^2 соответственно.

2. Основные понятия и определения. Напомним общепринятые понятия систем Фреге, выводов в них и сложностных характеристик выводов.

Каждая система Фреге $\mathfrak{I}$ использует некоторое конечное, функционально полное множество пропозициональных связок. $\mathfrak{I}$ определяется конечным множеством схематически заданных правил вывода $[(A_1\ A_2\ \ldots A_k)/(B)]$ (при k=0 соответствующее правило определяет схему ксиом). $\mathfrak{I}$ непротиворечива, т. е. для каждого правила вывода, если при некотором истинностном значении переменных все $A_i (1 \le i \le k)$ принимают значение "истина", то и B принимает значение "истина". $\mathfrak{I}$ полна, т. е. всякая тавтология выводима в $\mathfrak{I}$. Система Фреге с подстановкой $S\mathfrak{I}$ получается из $\mathfrak{I}$ добавлением правила простой подстановки $[(A)/(A\sigma)]$, где σ - отображение, ставящее в соответствие переменной формулы A некоторую формулу (в частности переменную), и $A\sigma$ - результат повсеместной замены этой переменной в A на соответствующую формулу.

В дальнейшем мы будем считать зафиксированными некоторую систему Фреге $\mathfrak{I}$ и соответствующую систему с подстановкой $S\mathfrak{I}$. Результат настоящей работы не зависит от выбора системы, однако для упрощения рассматриваемого примера мы будем предполагать, что в числе прочих язык $\mathfrak{I}$ содержит логические связки $\to$ и $\wedge$.

Мы будем пользоваться общепринятым определением вывода в данной системе как последовательности формул, каждая из которых является аксиомой данной системы или получается из предыдущих по одному из правил вывода данной системы. Вывод в системе $\mathfrak{I}$ будем называть $\mathfrak{I}$-выводом, а в системе $S\mathfrak{I}$ - соответственно $S\mathfrak{I}$-выводом.

Длину формулы F, понимаемую как количество всех символов в F, будем обозначать через (F).

В качестве сложности вывода зафиксируем два понятия: количество различных формул (шагов) в выводе и суммарную длину всех формул вывода.

Через $Sf(F)$ обозначим множество всех неэлементарных подформул формулы F. Для каждой формулы F, каждой подформулы $\varphi \in Sf(F)$ и произвольной переменной p через $(F)^p_\varphi$ обозначим результат повсеместной замены в F подформулы φ на переменную p. При этом если $\varphi \notin Sf(F)$, то $(F)^p_\varphi = F$.

Множество различных переменных формулы F обозначим через $\mathrm{Var}(F)$.

Определение. Пусть для некоторой твт F p - некоторая переменная такая, что $p \notin \mathrm{Var}(F)$ и $\varphi \in Sf(F)$. Подформулу φ назовем существенной для F, если $(F)^p_\varphi$ не является тавтологией.

Множество существенных для твт F подформул обозначим через $Essf(F)$.

Очевидно, что если F является минимальной твт, т. е. не может быть получена подстановкой из более короткой твт, то $Essf(F)=Sf(F)$.

Если формулы не могут быть получены по правилу подстановки из одной и той же существенной подформулы некоторой твт, то будем говорить, что эти формулы несравнимы.

Для каждого правила вывода $[(A_1 A_2 \ldots A_k)/(B)]$ $(k \geq 1)$ определяющей назовем любую из существенных подформул формулы $A_1 \wedge (A_2 \wedge (\ldots \wedge (A_{k-1} \wedge A_k)\ldots)) \rightarrow B$. Множество определяющих подформул будем обозначать через $Dsf(A_1, A_2, \ldots, A_k, B)$.

Формулу φ назовем важной в $\Im$-выводе ($S\Im$-выводе), если φ или является существенной для некоторой аксиомы этого вывода, или является определяющей для некоторого $\Im$-правила, примененного в выводе.[*]

3. Основные результаты. Здесь будет описан класс формул длины n, нижние оценки количества шагов и длины выводов которых имеют порядок n и n^2 соответственно и в $\Im$ и в $S\Im$. В основе доказательства этого результата лежит следующее свойство существенных подформул.

Лемма. 1) *Для каждого $\Im$-правила* $[(A_1 A_2 \ldots A_k)/(B)]$ $(k \geq 1)$ $Essf(B) \subseteq \subseteq$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} Essf(A_i)\right) \bigcup Dsf(A_1, A_2, \ldots, A_k, B).$$

2) *Для правила подстановки* $[(A)/(A\sigma)]$ $Essf(A\sigma) \subseteq \{ \varphi\sigma / \varphi \in Essf(A)\}$.

Доказательство пункта 1) основано на непротиворечивости $\Im$-правил.

Доказательство пункта 2) следует из того, что если для некоторых p, φ, A и σ $(A)^p_\varphi$ является твт, то $(A\sigma)^p_{\varphi\sigma}$ также твт, а значит если $(A\sigma)^p_{\varphi\sigma}$ не является твт, то $(A)^p_\varphi$ также не твт.

Следствие. Пусть F - некоторая твт и $\varphi \in Essf(F)$, тогда

1) в каждом $\Im$-выводе формулы F формула φ должна быть важной;

2) если правилами подстановки, использованными в некотором $S\Im$-выводе формулы F, являются $[(A_1)/(A_1\sigma_1)]$, $[(A_2)/(A_2\ \sigma_2)], \ldots, [(A_m)/(A_m\sigma_m)]$, то φ должна быть или важной формулой этого вывода, или результатом последовательных подстановок $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{iS}$ для $1 \leq i_1, i_2, \ldots i_S \leq m$ в одну из важных формул.

Доказательство очевидным образом следует из утверждения леммы.

Теорема 1. *Для достаточно больших* n*, если* F_n *твт такая, что* $|F_n|=O(n)$ *и для некоторого* $l=O(n)$ *существуют подформулы* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ *такие, что*

а) $\{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l \} \in Essf(F_n)$,

б) *формулы* φ_i и φ_j $(1 \le i < j \le l)$ *попарно несравнимы,*

в) $|\varphi_1| < |\varphi_2| < \ldots < |\varphi_l|$ и $|\varphi_l|=O(n)$,

то количество шагов в любом $\Im$*-выводе* ($S\Im$*-выводе*) *формулы* F_n *не менее, чем* $O(n)$*, а длина любого* $\Im$*-вывода* ($S\Im$*-вывода*) *не менее* $O(n^2)$.

Доказательство следует из вышеприведенных утверждений и того факта, что и количество существенных подформул каждой аксиомы, и количество определяющих подформул каждого $\Im$-правила ограничено некоторой константой.

Пример. Нетрудно видеть, что условия теоремы выполнены для $F_n = (p_1 \to p_1) \wedge ((p_2 \to p_2) \wedge (\ldots \wedge ((p_{n-1} \to p_{n-1}) \wedge (p_n \to p_n))\ldots))$, где $\varphi_i = (p_{n-i} \to$ $\to p_{n-i}) \wedge ((p_{n-i+1} \to p_{n-i+1}) \wedge (\ldots \wedge (p_{n-1} \to p_{n-1}) \wedge (p_n \to p_n))\ldots))$ $\quad (0 \le i \le n-1)$.

Теорема 2. *Для достаточно больших n существуют формулы* F_n *такие, что минимальные количества шагов их* $\Im$*-выводов и* $S\Im$*-выводов имеют порядок n, а минимальные длины их* $\Im$*-выводов и* $S\Im$*-выводов имеют порядок* n^2.

В качестве таковых могут быть рассмотрены, например, вышеприведенные. Для них нетрудно получить одинаковые верхние оценки сложностей $\Im$-выводов и $S\Im$-выводов, равные по порядку нижним для обоих критериев сложностей.

Фактически для класса формул, удовлетворяющего условиям теоремы 1, не имеет место "ускорение" выводов при переходе от $\Im$ систем к $S\Im$ системам, исследованное в работах [1, 3, 4].

Заметим, что при мультипликативной подстановке формула F_n может быть выведена за $\log_2 n$ шагов, что указывает на существенное различие способов подстановки.

Автор благодарен участникам семинара под руководством И. Заславского за полезные советы.

---

* Отметим, что важные в выводе формулы активны в смысле определения, введенного в [1].

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Buss S. R.* - Arch. Math. Logic. 1995. V. 34. P. 377-394.
2. *Urquhart A.* - Arch. Math. Logic. 1997. V. 37. P. 15-19.
3. *Чубарян А. А.* - Прикл. математика. ЕГУ. 1981. N 1. C. 81-89.
4. *Г. С. Цейтин, Чубарян А. А.* - Мат. вопр. кибернетики и вычисл. техники. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1975. С. 57-64.

Ա. Ա. Չուբարյան

Տեղադրության գործողությունը պարունակող Ֆրեգեի համակարգերի արտածումների բարդության վերաբերյալ

Հոդվածում ապացուցված է, որ գոյություն ունեն O(n) երկարության նույնաբանություններ, որոնց արտածման քայլերի քանակը և երկարությունը գնահատվում են համապատասխանաբար O(n) և O(n^2) կարգի ֆունկցիաներով և' Ֆրեգեյի համակարգում, և' պարզ տեղադրության կանոնը պարունակող Ֆրեգեի համակարգում:

Ապացույցը տրվում է հոդվածում ներմուծված նույնաբանությունների էական ենթաբանաձևերի գաղափարի հիման վրա: