УДК 517.55

А. В. Арутюнян

Операторы Теплица и теоремы деления в анизотропных классах голоморфных в полидиске функций

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 15/V 2000)

1.1. Существенную роль в теории классов Харди и их многочисленных приложениях играет общеизвестная факторизация на внешние и внутренние функции. Как показали Б. И. Коренблюм [1], В. П. Хавин [2], Ф. А. Шамоян [3], такая факторизация может быть успешно применена для исследования классов функций, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы. Результаты этих работ были основаны на том, что многие из классов указанного типа инвариантны относительно применения теплицевых операторов вида $T_h(f) = P_+(f \cdot h)$, где h - любая функция, голоморфная и ограниченная в круге, а P_+ - проектор М. Рисса.

1.2. Пусть $U^n = \{z = (z_1,...,z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_i| < 1,\ 1 \le i \le n\}$ − единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, $T^n = \{z \in \mathbf{C}^n\ |z_i| = 1,\ 1 \le i \le n\}$ - его остов, $H(U^n)$ − множество голоморфных, а $H^\infty(U^n)$ − голоморфных и ограниченных в U^n функций. Далее, пусть $\alpha = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, где $\alpha_j > -1$ и $1 \le j \le n$ мультииндексы, и $z^\alpha = z^{\alpha 1}{}_1 \times \cdot\cdot\cdot \times z^{\alpha n}{}_n$, $(z = (z_1,...,z_n))$. Через $H^p(\alpha_1,...,\alpha_n)$ будем обозначать класс голоморфных в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{H^p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \left(\int_{U^n} |f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)|^p \prod_{j=1}^{n} \left(1-|\zeta_j|\right)^{\alpha_j} dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} < +\infty$$

где $1 \le p < +\infty$, а $m_{2n}(\zeta)$ 2n - мерная мера Лебега на U^n. Отметим, что классы $H^p(\alpha_1,...,\alpha_n)$ - многомерные аналоги известных классов М.М. Джрбашяна [4,5].

Всюду ниже будем полагать, что $\mathbf{Z}^k{}_+$ − множество векторов, компоненты которых − натуральные числа, $\mathbf{R}^k{}_+$ − множество векторов с положительными компонентами и $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ $(0 < \beta_j < 1,\ 1 \le j \le n)$. Приведем определение многомерных липшицевых классов, введенных в [б].

Определение 1.1. Измеримая, ограниченная на T^n функция f принадлежит классу $\widetilde{\Lambda}(\beta_1,\dots,\beta_n)$, если для любого вектора $(i_1,...i_k) \in \mathbf{Z}^k{}_+$ $(1 \le k \le n)$

$$\frac{\left|\Delta_{h_{i_k}\dots h_{i_1}} f\left(e^{i\vartheta_1},\dots,e^{i\vartheta_n}\right)\right|}{\left|h_{i_1}\right|^{\beta_{i_1}}\dots\left|h_{i_k}\right|^{\beta_{i_k}}} = C_{i_1\cdots i_k}(f) < +\infty$$

$$\sup_{\substack{(\vartheta_1\ldots,\vartheta_n)\in Q^n \\ (h_{i_1,\ldots},h_{i_k})\in \mathbf{R}_+^k}}$$

где $\quad Q^n = \underbrace{[-\pi,\pi]\times\ldots\times[-\pi,\pi]}_{n} a$

$$\Delta_{h_{i_k}\ldots h_{i_j}} = \Delta_{h_{i_k}}\left(\Delta h_{i_{k-1}}\ldots(\Delta h_{i_1})\ldots\right),$$

где $\quad \Delta_{h_j} = f\left(e^{i\vartheta_1},\ldots,e^{i\vartheta_{j-1}},e^{i(\vartheta_j+h_j)},e^{i\vartheta_{j+1}},\ldots,e^{i\vartheta_n}\right) - f\left(e^{i\vartheta_1},\ldots,e^{i\vartheta_n}\right)$

Далее, условимся полапать, что $\widetilde{\Lambda}^{\alpha}(\beta_1,\ldots,\beta_n) = \widetilde{\Lambda}(\beta_1,\ldots,\beta_n)\cap H^{\infty}(U^n)$ и

$$\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^a(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \max_{1\le k\le n}\ \max_{1\le i_1<\cdots<i_k\le k} C_{i_1,\ldots,i_k}(f) + \|f\|_{H^p(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}.$$

В [б] исследованы мультипликативные свойства классов $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и в терминах этих классов дано полное описание сопряженного пространства $(H^p\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n))^*$ при $0 < p \le 1$. Там же при целозначных $\beta_j (1 \le j \le n)$ дано и определение классов $\widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. Отметим, что классы $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ранее были исследованы С. М. Никольским [7] в случае, когда $(h_{i1},\ldots, h_{ik}) \equiv (h_1,\ldots, h_n)$.

Определение 1.2. Оператор Теплица с символом $h \in L^1(T^n)$ – это интегральный оператор

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \equiv \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\zeta_1,\ldots\zeta_n)h(\zeta_1,\ldots\zeta_n)d\zeta_1\ldots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)},\qquad z=(z_1,\ldots,z_n\in U^n)$$

В дальнейшем изложении использовано также следующее определение из [8], где для удобства изменено обозначение вводимого функционального класса.

Определение 1.3. Суммируемая на T^n функция h принадлежит классу RL, если ее коэффициенты Фурье равны нулю вне множества $\mathbf{Z}^k_+ \cup -\mathbf{Z}^k_+$.

2. Данная статья посвящена исследованию дальнейших свойств классов $\widetilde{\Lambda}^a(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. В нижеследующих теоремах 1 и 2, соответственно, установлено, что эти классы являются алгебрами и что они инвариантны при применении теплицевых операторов. Исходя из результатов [8], относящихся к ограниченности операторов $T_h(f)$ в $H^p\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, доказана теорема 3, где дано описание тех символов $h\in\widetilde{\Lambda}(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, для которых $T_h(f) \in H^p\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ при любом $f \in H^p\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Наконец в качестве приложения теорем 2 и 3 к вопросам деления на внутреннюю функцию в пространствах $\widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\dots,\beta_n)$ и $H^p\{\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ $(0 < p \le 1)$ установлена теорема 4.

Теорема 2.1. Классы $\Lambda^a = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ являются алгебрами.

Замечание. Классы $\Lambda^a = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ в отличие от $\widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\dots,\beta_n)$, доказанным свойством не обладают. При этом существуют такие f, $g \in \Lambda^a = (\beta_1,\dots,\beta_n)$, что $f \cdot g \notin \Lambda^a = (\beta_1,\dots,\beta_n)$. Действительно, пусть $n = 2$ и $g(z) = z_1 \cdot z_2$. Если $f(z_1, z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$, где $\varphi_{1,\,2}$ произвольные

дифференцируемые функции, то, очевидно, $f \in \Lambda^a(\beta_1, \beta_2)\left(т.к. \dfrac{\partial^2 f(z_1,z_2)}{\partial z_1 \partial z_2} = 0\right)$. Однако ясно, что $f \cdot g \in \Lambda^a = (\beta_1,\dots,\beta_2)$ не для всех возможных φ_1 и φ_2.

Напомним, что функция f называется мультипликатором пространства *X,* если $f \cdot g \in X$ при любом $g \in X$.

Теорема 2.2. Пусть $f \in \widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\dots,\beta_n)$ – любая функция и $h = h_1 + \bar{h}_2$, где h_1 голоморфный мультипликатор пространства $\widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\dots,\beta_n)$, а $h_2 \in H^\infty(U^n)$. Тогда $T_h(f) \in \widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\dots,\beta_n)$.

Следующая теорема 3, доказанная на основе результатов [6] и [8], в терминах функций из классов $\widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\dots,\beta_n)$характеризует множество символов h, при которых ограничен теплицев оператор в классах $H^p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Теорема 2.3. Пусть $(0 < p \le 1)$ и $h \in RL$ любые. Тогда $T_h(f) \in H^p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ только в том случае, когда справедливо представление $h = h_1 + \bar{h}_2$, где $h_1 \in H^\infty(U^n)$, а $h_2 \in \widetilde{\Lambda}^a(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, где $\gamma_j (1 \le j \le n)$ определены из равенств

$$\gamma_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{j+2}}{p} - 1, & \text{при нецелых } \alpha j \\ \dfrac{\alpha_{j+2}}{p} - 2, & \text{при целых } \alpha j \end{cases}$$

Перейдем к приложению установленных выше результатов к вопросам деления пространствах $H^p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\widetilde{\Lambda}^a(\beta_1,\dots,\beta_n)$. Для этого сначала введем следующие общепринятые определения.

Определение 2.1. Функция $g \in H^\infty(U^n)$ называется внутренней, если для ее радиальных предельных значений $|g^*(w)| = 1$ почти всюду на T^n.

Определение 2.2. Внутреннюю функцию $g \in H^\infty(U^n)$ будем называть хорошей, если $u[g] = 0$, $u[g]$ – наименьшая n-гармоническая мажоранта функции $\log[g]$ в U^n (**[9]**) .

Теорема 4. Пусть $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$, $\alpha_j > -1$ и $1 \le j \le n$, $0 < \beta_j < 1$, $1 \le j \le n$) и **X** обозначает какой-либо из классов $H^p(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $\tilde{\Lambda}^{\alpha}(\beta_1,...,\beta_n)$. Далее, пусть $f \in$ **X**, J − хорошая внутренняя функция, $F \in H^{\infty}(U^n)$ и $f = F \cdot J$. Тогда $F \in$ **X**.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Коренблюм Б. И.* - Мат. заметки. 1971. Т. 10. № 1. С. 53-68.
2. *Хавин В. П.* - Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1971. Т. 22. С. 202-205.
3. *Шамоян Ф. А.* - Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1971. Т. 22. С. 206-208.
4. *Джрбашян М. М.* - ДАН Арм. ССР. 1945. Т. 3. № 1. С. 3-9.
5. *Джрбашян М. М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР. 1948. Вып. 2, С. 3-40.
6. *Шамоян Ф. А., Арутюнян А. В.* - Изв. НАН Армении, Математика. 1993. Т. 28. № 6. С. 50-68.
7. *Никольский С. М.* - Аппроксимация функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
8. *Шамоян Ф. Л., Арутюнян А. В.* - Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. № 2. С. 70-78.
9. *Рудин У.* - Теория функций в полидиске. М.: Мир. 1974.

Ա.Վ. Հարությունյան

Տյոպլիցյան օպերատորներ և բաժանման թեորեմներ բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների անիզոտրոպ տարածություններում

Աշխատանքը վերաբերում է բազմաշրջանում անալիտիկ, ընդհուպ մինչև եզրն անընդհատ ֆունկցիաների կշռային դասերի որոշ հատկությունների ուսումնասիրմանը, այդ թվում՝

ա) Բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների լիպշիցյան նոր դասերի հատկությունների ուսումնասիրմանը: Ապացուցվում է, որ այդ դասերը կազմում են հանրահաշիվ: Դիտարկվել է սահմանափակ, անտիանալիտիկ սիմվոլով տյոպլիցյան օպերատոր նշված դասերում: Ի ընդհանրացումն նախկինում ստացված արդյունքի (Կոշու տիպի ինտեգրալի սահմանափակությունը լիպշիցյան դասերում), ստացվում է, որ այդ դասերում տյոպլիցյան օպերատորը նույնպես սահմանափակ է գործում: Օգտվելով նախկինում ստացված արդյունքներից, Ջրբաշյանի հայտնի կշռային դասերի բազմաչափ անալոգները նկարագրվում են ողորկ ֆունկցիաների տերմիններով:

բ) Հարդիի տեսության մեջ և նրա բազմաթիվ կիրառություններում կարևոր դեր է կատարում ներքին-արտաքին ֆակտորիզացիան: Ներկայացված աշխատանքում ուսումնասիրվում է բազմաչափ լիպշիցյան, ինչպես նաև Ջրբաշյանի հայտնի կշռային դասերի բազմաչափ անալոգներում «լավ» ներքին ֆունկցիաների վրա բաժանման հարցը: Պարզվում է, որ նշված դասերում կարելի է բաժանել «լավ» ներքին ֆունկցիաների վրա՝ մնալով այդ դասերում: