МАТЕМАТИКА

УДК 616.8

С. Л. Амбарян

Решение уравнения Пелля при помощи последовательностей Фарея

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 4/V 2000)

Рассмотрим диофантово (неопределенное) уравнение 2-й степени

$$\begin{aligned} &x^2 - Dy^2 = 1 \ ; \\ &z = F(x, y) = x^2 - Dy^2 - 1 = 0 \ , \end{aligned} \tag{1}$$

где $D > 0$, D - неполный квадрат, которое называется уравнением Пелля (точнее уравнением Ферма) [1,2]. Те значения x и y, которые образуют целочисленное решение уравнения Пелля, представляют собой соответственно числитель и знаменатель одной из подходящих дробей к $\sqrt{D}$. Литературу по решению частных случаев уравнения Пелля см. в [3]. В [4] описан алгоритм разложения квадратичной иррациональности в непрерывную дробь, для работы которого достаточно знать D и целую часть $\sqrt{D}$.

Уравнение (1) имеет бесконечное число решений [1,2].

Пусть

$$d = [\sqrt{D}\,] , \ d^2 < D < (d+1)^2 \ ;$$

обозначим через $\Delta_1 = D - d^2$, $\Delta_2 = (d+1)^2 - D$, $c = 2(\Delta_2 - \Delta_1) - 1$,

$$\delta = \sqrt{D} - d , \quad 0 < \delta < 1 .$$

Представим $2d$ и $2(d+1)$ равенствами вида

$$2d = n\,\Delta_1 + r_1 , \quad 0 \le r_1 < \Delta_1 ;$$

$$2(d + 1) = m\Delta_2 + r_2 , \quad 0 \le r_2 < \Delta_2 .$$

Рассмотрим случай, когда $r_1 = 0$, ищем решение уравнения Пелля в виде $x=a+db$ и $y=b$, получим

$$a^2 - 1 = \Delta_1 b(b - na) ,$$

это уравнение превращается в тождество при $a=1$ и $b=n$, т. е.

$$x = dn + 1 , \quad y = n .$$

Таким образом, при $r_1=0$ либо $r_2=0$ решения уравнения Пелля известны, в частности, получим следующие решения уравнения (1):

1. $\Delta_1 = 1$, $D = d^2 + 1$, $x = 2d^2 + 1$, $y = 2d$;
2. $\Delta_1 = 2$, $D = d^2 + 2$, $x = d^2 + 1$, $y = d$;
3. $\Delta_1 = d/2$, $D = d^2 + d/2$, $x = 4d + 1$, $y = 4$;
4. $\Delta_1 = d$, $D = d^2 + d$, $x = 2d + 1$, $y = 2$;
5. $\Delta_2 = d + 1$, $D = (d + 1)^2 - (d + 1)$, $x = 2d + 1$, $y = 2$;
6. $\Delta_2 = (d + 1)/2$, $D = (d + 1)^2 - (d + 1)/2$, $x = 4d - 1$, $y = 4$;
7. $\Delta_2 = 2$, $D = (d + 1)^2 - 2$, $x = (d + 1)^2 - 1$, $y = d + 1$;
8. $\Delta_2 = 1$, $D = (d + 1)^2 - 1$, $x = d + 1$, $y = 1$;

С помощью данной структуры представления числа

$$D = d^2 + \Delta_1 = (d + 1)^2 - \Delta_2 = ((\Delta_1 - \Delta_2 + 1)/2)^2 + \Delta_1\Delta_2 =$$

$$= ((3\Delta_1 - \Delta_2 + 1)/2)^2 + c\Delta_1 = ((3\Delta_2 - \Delta_1 - 1)/2)^2 - c\Delta_2 ,\ \text{т. е. } D \equiv f(\Delta_1, \Delta_2) ,$$

получено много интересных результатов по решению уравнения (1). Например, пусть $(\Delta_1 + \Delta_2)$ кратно 3 и $D = d^2 + d + 1$, тогда $x = (\Delta_1 + \Delta_2)y/2 + 1$ и $y = 4(\Delta_1 + \Delta_2)/3$ или же $(\Delta_1 + \Delta_2)$ кратно 5 и $D = d^2 + d - 1$, тогда $x = (\Delta_1 + \Delta_2)y/2 - 1$ и $y = 4(\Delta_1 + \Delta_2)/5$.

Согласно приведенной таблице, в дальнейшем предположим, что $\Delta_1, \Delta_2 \notin\notin \{ 1, 2\}$.

Поставим следующую задачу. Найти минимальное решение уравнения (1), отличное от тривиального решения x=1 и y=0, при помощи последовательностей Фарея [2].

Определение 1. Последовательностью Фарея F_n называется множество несократимых рациональных чисел a/b со знаменателями $b \le n$, принадлежащих сегменту [0,1] и расположенных в порядке их возрастания. Очевидно, что

$$d + \Delta_1 / (\Delta_1 + \Delta_2) < \sqrt{D} < d + \Delta_1 / (\Delta_1 + \Delta_2 - 1) ,$$
$$1 / (n + (r_1 + 1) / \Delta_1) < \delta < 1 / (n + r_1 / \Delta_1) , \tag{2}$$
$$0 < 1 / (n + 1) < \delta < 1 / n \le 1) .$$

Дроби $1/(n+1)$ и $1/n$ являются соседними дробями Фарея со знаменателем τ, удовлетворяющим условию $n+1 \le \tau \le 2n+1$. Отметим, что соседние элементы последовательностей

$$x_n = 1/n \quad \text{и} \quad y_n = (n - 1)/n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

являются соседними фареевыми дробями в соответствующих последовательностях Фарея.

Согласно теории фареевых дробей, если $a/b < x/y < p/q$ - три последовательные дроби Фарея в F_n, то $x/y=(a+p)/(b+q)$. Дробь x/y называется медиантой дробей a/b и p/q.

Сопоставим дроби a/b значение функции $z=F(x, y)$ в точке $x=a+db$, $y=b$ и введем функцию одной переменной $f(x/y)$, такую, что $f(a/b)=(a+db)^2-Db^2-1$, где a/b - фареева дробь.

Определение 2. Последовательность вложенных один в другой (каждый последующий содержится в предыдущем) промежутков

$$E_k=[a_k/b_k, p_k/q_k]\ , \quad E_k\supset E_{k+1}\ ; \quad k=1, 2, 3, \dots ,$$

где $a_1/b_1 < p_1/q_1$ соседние дроби Фарея, называется фареево-подходящей, если в качестве последующего левого или правого конца промежутка выступает медианта концов предыдущего промежутка.

В этих обозначениях имеет место следующая теорема (аналог теоремы Коши).

Теорема. Пусть функция $f(x/y)$ на концах промежутка $[a_1/b_1, p_1/q_1]$ принимает значения разных знаков, тогда на множестве фареево-подходящих последовательностей существует такая последовательность, для которой $f(a_k/b_k)=0$; $1 \le k << \infty$.

Ниже приводится алгоритм, который находит корни функции $f(x/y)$.

Пусть функция $f(x/y)$ на концах промежутка $[a_1/b_1,\ p_1/q_1]$, которые являются соседними дробями Фарея, принимает значения разных знаков. Построим фареево-подходящую последовательность по следующему принципу:

a. вычислить значение функции $f(x/y)$ в точке a/b, равной медианте концов промежутка $[a_1/b_1, p_1/q_1]$;

b. если $f(a/b) > 0$, то в качестве нового правого конца промежутка взять дробь a/b;

c. если $f(a/b) < 0$, то в качестве нового левого конца промежутка взять дробь a/b.

Процесс продолжить до тех пор, пока $f(a/b) \neq 0$, в противном случае

$$x = a + db \ \ , y = b$$

является решением уравнения Пелля.

Проиллюстрируем последний шаг работы алгоритма:

$$x = y_1 + dy \ \text{, тогда } x_1^2 - Dy_1^2 = -\Delta_1 \ \text{ и } \ x_1 / y_1 < \sqrt{D}\ ;$$

$$x = -y_2 + (d+1)y \ \text{, тогда } x_2^2 - Dy_2^2 = +\Delta_2 \ \text{ и } \ x_2 / y_2 > \sqrt{D}\ .$$

Очевидно, что $x=y_1+d(y_1+y_2)=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$. В этих обозначениях справедливы следующие соотношения:

$$x_2y_1 - x_1y_2 = 1\ ,$$

$$|\Delta_2y_1 - \Delta_1y_2|(y_1+y_2) - y_1y_2 = 1\ ,$$

$$|\Delta_2x_1 - \Delta_1x_2|(x_1+x_2) - x_1x_2 = -D\ ,$$

$$x_1x_2 - Dy_1y_2 = (\Delta_1 - \Delta_2 + 1)/2\ .$$

Таким образом,

$$x_1 / y_1 < \sqrt{D} < x_2 / y_2\ ,$$

$$(x_1 - dy_1) / y_1 < \delta < (x_2 - dy_2) / y_2 ,$$

$$(y_1 - |\Delta_2 y_1 - \Delta_1 y_2|) / y_1 < \delta < |\Delta_2 y_1 - \Delta_1 y_2| / y_2 .$$

Медиантой дробей границ числа δ будет $y_1 / (y_1+y_2)$, т. е.

$$x = y_1 + d(y_1 + y_2),\ y = y_1 + y_2 \text{ - решение уравнения Пелля.}$$

Описанный алгоритм успешно решает также диофантово уравнение 1-й степени $a\ x+by=c$ и может быть применен к решению многих задач, связанных с подходящими и/или фареевыми дробями.

Как следствие отметим, что этот алгоритм позволяет вычислить значение $\sqrt{D}$ с любой точностью.

Существует множество значений функции $f(x/y)$, для которых работу построения новых медиант можно приостановить, например:

$$x^2 - Dy^2 = \{\ \ldots, -\Delta_1\Delta_2, -\Delta_1, -2, -1, +2, c, \Delta_2, \Delta_1{}^2, \Delta_2{}^2, \ldots\}\ .$$

Диофантово уравнение

$$x^2 - Dy^2 = -\Delta_1\Delta_2$$

имеет тривиальное решение $x = \Delta_1 + d(\Delta_1 + \Delta_2)$ и $y = (\Delta_1 + \Delta_2)$.

При больших значениях D следует применить арифметику многократной точности [4]. С этой целью разработан пакет прикладных программ (ППП) выполнения арифметических операций с произвольно высокой точностью [5]. Несмотря на то, что граничные значения Δ_1 и Δ_2 не рассматриваются, при больших значениях D оценки (2) могут быть не лучшими.

Ставим задачу улучшения оценок (2):

1. найти максмальное целое число m, для которого

$$m / (m + 1) \le \Delta_1 / (\Delta_1 + \Delta_2)\ ,\ \text{ т. е. } m = [\Delta_1 / \Delta_2]\ \ ;$$

2. найти минимальное целое число n, для которого

$$\Delta_1 / (\Delta_1 + \Delta_2 - 1) \le n / (n + 1)\ ,\ \ \text{ т. е. } n =]\Delta_1 / (\Delta_2 - 1)[\ \ .$$

Таким образом,

$$m / (m + 1) < \delta < n / (n + 1)\ . \tag{2a}$$

Дальнейшее улучшение оценки (2a) связано с модификацией алгоритма нахождения нуля функции $z=F(x, y)$, например, при помощи построения специальных соседних фареевых дробей либо обычного метода деления отрезка на множестве фареевых дробей.

В заключение отметим, что описанный алгоритм нахождения решения уравнения Пелля по количеству шагов его работы (построение медиант), без улучшения оценок, часто уступает классическому алгоритму нахождения решения уравнения Пелля по подходящим дробям к $\sqrt{D}$, которые оказались подмножеством построенных медиант.

Ереванский научно-исследовательский
институт математических машин

Литература

1. *Арнольд И. В.* Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1939.
2. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.
3. *Айерлэнд К.,* Роузен. М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
4. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1977.
5. *Амбарян С. Л.* В сб.: ППП в среде Visual C++ (Windows 95). ЕрНИИММ. Ереван. 1998.

Ս. Լ. Համբարյան

Պելլի հավասարման լուծումը Ֆարեի հաջորդականությունների միջոցով

Հայտնի է, որ Պելլի հավասարման հնարավոր լուծումները պետք է փնտրել $\sqrt{D}$-ին մոտարկող անընդհատ (շղթայական) կոտորակների համարիչների և հայտարարների մեջ:

Առաջարկվում է Պելլի հավասարման լուծման նոր մոտեցում:

Դիտարկվում է Պելլի հավասարման մինիմալ լուծումը գտնելու խնդիրը Ֆարեի կոտորակների մեդիանտների կառուցման մեթոդի օգնությամբ:

Տեղի ունի Կոշու թեորեմի անալոգը հատվածում դիսկրետ ֆունկցիայի (անընդհատ ֆունկցիայի փոխարեն) արմատի գոյության վերաբերյալ՝ Ֆարեի կոտորակների մեդիանտների բազմության վրա:

Նշենք, որ Ֆարեի հարևան կոտորակների մեդիանտի կառուցումը պահանջում է ընդամենը գումարման երկու գործողություն: