УДК 621.39.1:519.24

**Э.А. Мирзаханян**

# О некоторых типах бесконечномерных гомотопических групп в гильбертовом пространстве

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 31/III 2000)

Статья посвящена бесконечномерной алгебраической топологии, а именно построению бесконечномерных относительных гомотопических групп пунктированных пар подмножеств вещественного (необязательно сепарабельного) гильбертова пространства $H$. В основе всех построений лежат два специальных класса $K_0 \subset K$ непрерывных подмножеств из $H$ [1-3].

В пункте 1 даны определения допустимых классов $K_0$ и $K$, а также некоторые сведения об отображениях, принадлежащих этим классам. Ряд основных свойств этих классов в частности содержится в [1-6].

В пункте 2 описывается один (назовем первым) подход к построению бесконечномерных относительных гомотопических групп пар подмножеств из $H$, называемых $K_0$ (соотв. $K$) - бесконечномерными гомотопическими группами. В целях более эффективных приложений, потребовав от сфероидов и их гомотопий удовлетворения некоторым условиям типа компактности, также определяются так называемые $K_0$ (соотв. $K$) - бесконечномерные гомотопические группы компактного типа.

В пункте 3 в случае сепарабельности пространства $H$ описывается второй подход к построению бесконечномерных гомотопических групп некомпактного типа, основанный на понятии ортонормированного базиса пространства $H$. Согласно теореме 3 рассматриваемые два подхода эквивалентны, т.е. приводят к изоморфным группам.

1. *Допустимые отображения.* Как уже отмечалось в введении, во всех построениях допустимыми отображениями будут непрерывные отображения, принадлежащие специальным классам $K_0$ и $K$, а также целому ряду классов, построенных посредством $K_0$ и $K$. Зафиксируем вещественное гильбертово пространство $H$.

**Определение 1.** Пусть $G$ - открытое подмножество пространства $H$, $f: G \to H$ лежит классу $K$ или является $K$-отображением (относительно $H$), если выполнено условие:

a) для любой точки $x_0 \in G$ и любого вещественого числа $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U=U(x_0,\varepsilon) \subset G$ точки $x_0$, конечномерное (линейное) подпространство $L=L(x_0,\varepsilon)$ пространства $H$ и действительное число $\lambda$ такие, что если точки $x, y \in U$ и вектор $(x-y)$ ортогонален к $L$, то выполнено соотношение:

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|.$$

Далее будем говорить, что $K$-отображение $f: G \to H$ принадлежит классу $K_0$ или является $K_0$-отображением, если выполнено:

b) (локальное удовлетворение условию Липшица) для любой точки $x_0 \in G$ существуют такие числа $r = r(x_0)$ и $c = c(x_0)$, что при $x, y \in G$, $\|x-x_0\| < r$, $\|y-x_0\| < r$ выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Фигурирующее в a) действительное число $\lambda$ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой $x_0$ и было пригодно для любого числа $\varepsilon > 0$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, заданная на $G$, непрерывна и единственна [2]; она называется терминальной производной отображения $f$. Отметим, что композиция двух $K_0$-отображений есть $K_0$-отображение, но композиция $K$-отображений не всегда есть $K$-отображение.

Пусть теперь $X$ - произвольное (необязательно открытое) подмножество из $H$. Будем говорить, что непрерывное отображение $f : X \to H$ является $K_0$ (соотв. $K$)-отображением, если существует открытое в $H$ подмножество $G \supset X$ и $K_0$ (соотв. $K$)-отображение $\bar{f} : G \to H$, такие, что $\bar{f}(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in X$. Если $X$ и $Y$ - подмножества из $H$ и $f : X \to Y$ - непрерывное отображение, то $f$ будем называть $K_0$ (соотв. $K$)-отображением $X$ в $Y$, если отображение $f : X \to H$, т.е. композиция $i o f : X \to Y$, где $i : Y \to H$ - вложение, является $К_0$ (соотв. $K$)-отображением. Через $K_0(M)$ (соотв. $K(M)$) будем обозначать класс всех $K_0$ (соотв. $K$)-отображений гильбертова пространства $M$.

2. *Некоторые типы бесконечномерных гомотопических групп.*

В этом пункте мы снова будем предполагать зафиксированным действительное гильбертово пространство $H$. Напомним, что (линейное) подпространство $M$ пространства $H$ называется подпространством конечной коразмерности (или дефекта) $q \geq 0$, если ортогональное дополнение к $M$ в $H$ имеет размерность $q$. Нам, однако, понадобится ввести понятие надпространства пространства $H$ коразмерности $q$, если $q$ - отрицательное целое число. Именно, если $q$ отрицательное целое число, то гильбертово пространство $M$ мы будем называть по отношению к $H$ надпространством коразмерности $q$, если $M$ содержит $H$ в качестве своего подпространства коразмерности $q$.

Условимся через $B(M)$, $B^*(M)$ и $S(M)$ обозначать соответственно единичные замкнутый, открытый шары и единичную сферу подпространства или надпространства $M$ пространства $H$.

Дадим теперь определение класса $K^*_q$, $q \in Z$. При $q$=0 мы определим $K^*_0$ как множество всех отображений $\varphi : H \to H$, принадлежащих классу $K_0(H)$. Если $q > 0$, то под $K^*_q$ мы будем понимать множество всех отображений $\varphi : M \to H$, принадлежащих классу $K_0(H)$, где $M \subset H$ - подпространство коразмерности $q$. Наконец, при $q < 0$ под $К^*_q$ мы будем понимать множество всех отображений $\varphi : M \to H$, принадлежащих классу $K_0$ относительно гильбертова пространства $M$, являющегося надпространством коразмерности $q$ пространства $H$.

Пусть теперь $M$ некоторое зафиксированное подпространство или надпространство конечной коразмерности $q \in Z$ пространства $H$. Выберем некоторый единичный вектор $e \in M$ и обозначим через $M_e$ подространство $M$, ортогональное к прямой $L_e$, проходящей через $e$. Далее положим

$$J^e(M) = \{x \in M; (x,e) \geq 0, x \notin L_e \text{ x } B^*(M)\} \cup \{x \in M \backslash B^*(M)); (x,e) \leq 0\} \tag{1}$$

Пусть $(X,A,x_0)$ тройка, состоящая из произвольного множества $X \subset H$, его подмножества $A \subset X$ и точки $x_0 \in A$.

**Определение 2.** Отображение $\varphi : (M,M \backslash B^*(M), J^e(M)) \to (X,A,x_0)$, принадлежащее классу $K^*_q$, будем называть (относительным) $K_0$-сфероидом коразмерности $q \in Z$ пары $(X, A)$ в точке $x_0$ или тройки $(X,A,x_0)$.

Обозначим через $F^{M,e}_q(X,A,x_0)$ множество всех $K_0$-сфероидов коразмерности $q$ тройки

$(X,A,x_0)$ и в нем введем операцию сложения.

Выберем некоторый единичный вектор $a \in M_e$ и для $\varphi,\psi \in F^{M,e}_q(X,A,x_0)$ положим

$$h(x)=\begin{cases} \varphi(2x+a), & \text{при} \quad (x,a) \le 0 \\ \psi(2x-a), & \text{при} \quad (x,a) \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

Так как отображения $x \to 2x + a$ и $x \to 2x - a$ принадлежат классу $K_0$, то $h \in F^{M,e}_q(X,A,x_0)$; $K_0$-сфероид $h$ будем называть суммой сфероидов $\varphi$ и $\psi$ и обозначать $h = \varphi + \psi$.

Определим теперь понятие гомотопности в $F^{M,e}_q(X,A,x_0)$. Обозначим через $R$ числовую прямую, а I - отрезок [0,1]. Декартово произведение $M' = R \times M$ можно рассматривать как гильбертово пространство, для которого $M$ является подпространством коразмерности I. В случае $q > 0$ следует за $R$ принять любую содержащуюся в $H$ прямую, проходящую через нулевую точку 0 и ортогональную к $M \subset H$.

**Определение 3.** Сфероиды $\varphi,\psi \in F^{M,e}_q(X,A,x_0)$ будем называть $K_0$- гомотопными и записывать $\varphi \cong \psi$, если существует отображение $\Phi : I \times M \to X,$ обладающее свойствами:

1) $\Phi$ принадлежит классу $K_0$ относительно гильбертово пространства $M' \cup H$;

2) для любого $t \in I$ отображение $\varphi_t : M \to X,$ определяемое равенством $\varphi_t(x) = \Phi(t; x)$, $x \in M,$ принадлежит множеству $F^{M,e}_q(X,A,x_0)$;

3) $\varphi_0 = \varphi$ и $\varphi_1 = \psi$.

При этом отображение $\Phi$, а также семейство $(\varphi_t)$ будем называть $K_0$- гомотопией сфероидов, соединяющей $\varphi$ и $\psi$. Ясно, что определяемое так понятие гомотопности является отношением эквивалентности, только в данном случае нужно каждый раз показать принадлежность отображений к классу $K_0$. Множество всех получаемых гомотопических классов будем обозначать через $\Pi^{M,e}_q(X,A,x_0)$. Введенная выше операция сложения сфероидов порождает сложение гомотопических классов по представителям в множестве $\Pi^{M,e}_q(X,A,x_0)$ по формуле $[\varphi]+[\psi]=[\varphi+\psi]$. Можно показать, что это сложение определено корректно, т.е. из $(\varphi \sim \varphi')$ и $(\psi \sim \psi')$ следует, что $(\varphi+\psi) \sim (\varphi'+\psi')$. В самом деле, соответствующую $K_0$-гомотопию получим, положив:

$$h_t(x)=\begin{cases} \varphi_t(2x+a), & \text{при} \quad (x,a) \le 0, \\ \psi_t(2x-a), & \text{при} \quad (x,a) \ge 0, \end{cases}$$

**Теорема 1.** *При любом целом q множество* $\Pi^{M,e}_q(X,A,x_0)$ *относительно операции сложения* $[\varphi]+[\psi] = [\varphi+\psi]$ *является коммутативной группой.*

Построенная группа обозначается через $\Pi^{M,e,a}_q(X,A,x_0)$. В построении группы $\Pi^{M,e,a}_q(X,A,x_0)$ участвуют три элемента выбора, а именно подпространство или надпространство $M$

коразмерности $q$ пространства $H$, единичный вектор $e \in M$ и единичный вектор $e \in M_e$. Из нижеследующих трех предложений следует независимость этой группы от элементов выбора.

**Предложение 1.** При любом целом $q$ группы $\Pi^{M,e,a}{}_q(X,A,x_0)$ и $\Pi^{M,e,a'}{}_q(X,A,x_0)$, построенные посредством различных единичных векторов $a,a' \in M_e$, изоморфны между собой.

В силу предложения 1 запись $\Pi^{M,e,a}{}_q(X,A,x_0)$ можно сократить до $\Pi^{M,e}{}_q(X,A,x_0)$.

**Предложение 2.** При любом целом $q$ группы $\Pi^{M,e}{}_q(X,A,x_0)$ и $\Pi^{M,e_1}{}_q(X,A,x_0)$, построенные посредством различных единичных векторов $e,e' \in M$, изоморфны.

В силу предложения 2 можно обозначение $\Pi^{M,e}{}_q(X,A,x_0)$ сократить до $\Pi^{M}{}_q(X,A,x_0)$.

**Предложение 3.** Пусть $M_1$ и $M_2$ два различных подпространства или надпространства одной и той же коразмерности $q \in Z$ пространства $H$. Тогда группы $\Pi^{M_1}{}_q(X,A,x_0)$ и $\Pi^{M_2}(X,A,x_0)$ изоморфны между собой.

Таким образом, при $q \in Z$ с точностью до изоморфизма группы $\Pi^{M}{}_q(X,A,x_0)$ не зависит от выбора $M$, и мы можем в обозначении букву $M$ опускать и обозначать через $\Pi_q(X,A,x_0)$. Построенную группу $\Pi_q(X,A,x_0)$ будем называть бесконечномерной (относительной) $K_0$-гомотопической группой (некомпактного типа) коразмерности $q \in Z$ множества $X$ в точке $x_0$ относительно подмножества $A$ или пары $(x,a)$ в точке $x_0$. В случае $A = \{x_0\}$ она называется (абсолютной) $K_0$-гомотопической группой коразмерности $q$ множества $X$ в точке $x_0$ и обозначается через $\Pi_q(X,A,x_0)$. В последнем случае $K_0$-сфероиды суть $K_0$-отображения $\varphi : (M,M \setminus B(M)) \to (X,x_0)$.

Перейдем теперь к определению бесконечномерных $K_0$-гомотопических групп компактного типа.

**Определение 4.** $K_0$-сфероид $\varphi : (M,M \setminus B^*(M)), J^e(M)) \to (X,A,x_0)$ коразмерности $q \in Z$ пары (X,A) точки $x_0$ будем называть $K_0$-сфероидом компактного типа, короче $K^c{}_0$-сфероидом, если выполнено условие:

c) для любого компактного множества $c \subset (X \setminus \{ x_0\})$ множество $\varphi^{-1}(c) \cap B(M)$ компактно, и если оно не пусто, то на нем терминальная производная $\lambda_\varphi(x)$ отображения $\varphi$ тождественно отлична от нуля.

Аналогично определяются $K_0$-гомотопия сфероидов $\Phi : I \times M \to X$ компактного типа (короче $K^c{}_0$-гомотопия сфероидов) и $K^c{}_0$-гомотопность двух $K^c{}_0$-сфероидов.

Все описанные выше конструкции проходят и в том случае, когда $K_0$-сфероиды и их $K_0$-гомотопии заменяются $K^c{}_0$-сфероидами и $K^c{}_0$-гомотопиями сфероидов соответственно. В результате строятся новые группы, которые мы будем называть бесконечномерными $K_0$-гомотопическими группами компактного типа, короче $K^c{}_0$-гомотопическими группами, и обозначать через $\Pi^c{}_q(X,A,x_0)$.

Наконец, если в основе всех вышеприведенных определений и конструкций вместо класса $K_0$ положить класс $K$, то мы получим группы другого типа, которые будем называть бесконечномерными $K$-гомотопическими группами, соответственно $K$-гомотопическими группами компактного типа пары *(X, A)* в точке $x_0$, и обозначать через $K\Pi_q(X,A,x_0)$ и $K\Pi^c{}_q(X,A,x_0)$.

**Замечание 1.** Для полной ясности можно было бы группу $\Pi_q(X,A,x_0)$ обозначать через $\Pi_q$

$(X,A,x_0;H)$. В этой связи отметим, что если гильбертово пространство $H$ является подпространством конечной коразмерности $h \geq 0$ пространства $H^*$, то мы будем иметь $\Pi_q(X,A,x_0;H) \cong \Pi_{q+n}(X,A,x_0;H^*)$ при любом $q \in Z$. Далее, если гильбертовы пространства $H_1$ и $H_2$ таковы, что пространство $H \subset H_1 \cap H_2$ имеет одну и ту же конечную коразмерность относительно $H_1$ и $H_2$ и $X \subset H$, то при любом $q \in Z$ будем иметь: $\Pi_q(X,A,x_0;H_1) \cong \Pi_q(X,A,x_0;H_2)$. Приведенные соотношения имеют место и для упомянутых выше гомотопических групп других типов.

3. *Случай сепарабельного гильбертова пространства.* В этом пункте рассматриваемое гильбертово пространство $H$ сепарабельно. Пусть $\sigma = (e_n)$ - произвольный ортонормированный базис в $H$, а $S^q{}_\sigma$, $T^q{}_\sigma : H \to H$ - линейные ограниченные операторы, определяемые по формулам

$$S^q{}_\sigma(e_n) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad n = 1,2,\dots,q, \\ e_{n-q}, & \text{при} \quad n = q+1, q+2,\dots \end{cases} \tag{3}$$

$$T^q{}_\sigma(e_n) = e_{n+q}, \quad \text{при} \quad n = 1,2,\dots \tag{4}$$

Ни одно из этих отображений не принадлежат классу $K_0$, но их композиции принадлежат. С помощью класса $K_0$ построим ряд других классов $K^q{}_\sigma$ ($q$ - любое целое число) отображений подмножеств из $H$.

**Определение 5.** Пусть $G$ открыто в $H$, а $f : G \to H$ - непрерывное отображение. Мы скажем, что $f$ принадлежит классу $K^q{}_\sigma$ при $q \geq 0$, если его можно представить в виде $f = \varphi \mathrm{o} T^q{}_\sigma$, где $\varphi$ определено на $T^q{}_\sigma(G)$ и принадлежат классу $K_0(H)$. Далее скажем, что $f$ принадлежит $K^q{}_\sigma$ при $q \leq 0$, если $f$ можно представить в виде $f = S^{-q}{}_\sigma \mathrm{o} \psi$, где $\psi \in K_0(H)$.

Мы сохраним некоторые обозначения пункта 2, в частности, $B(H) = B$, $B^*(H) = B^*$ суть единичный замкнутый и открытый шар в $H$, соответственно, и $J^{e_1}(H) = \{x \in H; (x,e_1) \geq 0, x \notin Le_1 \times B^*(He_1)\} \cup \{x \in (H \backslash B^*(H)); (x,e_1) \leq 0\}$. Пусть снова $(X,A,x_0)$ - фиксированная пунктированная пара в $H$.

**Определение 6.** Отображение $f : (H, H \backslash B^*, J^{e_1}(H)) \to (X,A,x_0)$, приндлежащее классу $K^{(q)}{}_\sigma$, будем называть $K_0$-сфероидом второго рода коразмерности $q \in Z$ паре (X,A) в точке $x_0$.

Множество всех таких сфероидов обозначим через $F^{\sigma,e_1}{}_q(X,A,x_0)$ и в нем введем операцию сложения, определив сумму $f + g$ по формуле

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(2x + e_2), & \text{при} \quad (x,e_2) \leq 0, \\ g(2x - e_2), & \text{при} \quad (x,e_2) \geq 0. \end{cases}$$

Далее, в $F^{\sigma,e_1}{}_2(X,A,x_0)$ введем отношение гомотопности. Пусть $R$ - числовая прямая, а $I$ -

единичный отрезок. В гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$ рассмотрим ортонормированный базис $\sigma^* = (e_0, e_1, e_2, \ldots e_n \ldots)$, где $e_0 = (1,0)$, а $\sigma = (e_n)$ - рассматриваемый выше базис в $H$.

**Определение 7.** Сфероиды $f, g \in F^{\sigma, e_1}{}_q(X,A,x_0)$ будем называть $K_0$-гомотопными и писать $f \cong g$, если существует непрерывное отображение $F : I \times H \to X$, обладающее следующими свойствами:

1) F принадлежит классу $K^{(q)}{}_{\sigma^*}$;

2) Для любого $t \in I$ отображение $f_t : H \to X$, определенное равенством $f_t(x) = F(t,x), x \in H$, принадлежит множеству $F^{\sigma, e_1}{}_q(X,A,x_0)$;

3) $f_0 = f$ и $f_1 = g$.

Отображение $F$, а также соответствующее семейство $f_t$ называется $K_0$-гомотопией сфероидов второго рода, соединяющей $f$ и $g$.

Отношение $f \cong g$ есть отношение эквивалентности и, следовательно, $F^{\sigma, e}{}_q(X,A,x_0)$ разбивается на классы эквивалентности (гомотопические классы), множество которых обозначим через $\Pi^\sigma{}_q(X,A,x_0)$. Оказывается, что если $f \sim f'$ и $g \sim g'$, а $(f_t)$ и $(g_t)$ - $K_0$-гомотопии сфероидов, соединяющие $f$ с $f'$ и $g$ с $g'$ соответственно, то $(f_t + g_t)$ будет $K_0$-гомотопией сфероидов, соединяющей $f + g$ с $f' + g'$. Это означает, что операцию сложения сфероидов можно корректно перенести на гомотопические классы, положив $[f] + [g] = [f + g]$.

**Теорема 2.** *Множество* $\Pi^\sigma{}_q(X,A,x_0)$ $K_0$ *относительно операции сложения* $[f] + [g] = [f + g]$ *образует коммутативную группу.*

Группу $\Pi^\sigma{}_q(X,A,x_0)$ $K_0$ будем называть бесконечномерной $K_0$- гомотопической группой второго рода пары $(X, A)$ в точке $x_0$.

Пусть $M^* = R^q \times H$, $\{e^*{}_1, e^*{}_2, \ldots, e^*{}_q\}$ - канонический базис в евклидовом пространстве $R^q$.

Пусть наконец $\sigma^* = (e^*{}_1, e^*{}_2, \ldots, e^*{}_q, e_1, \ldots, e_n \ldots)$, где $\sigma = (e_1, e_2, \ldots e_n, \ldots)$ - рассматриваемый выше ортонормированный базис в $H$. Ясно, что $\sigma^*$ - ортонормированный базис в $M^*$. Рассмотрим линейные ограниченные операторы $S^q{}_{\sigma^*}, T^q{}_{\sigma^*} : M^* \to M^*$, определенные в базисе $\sigma^*$ по формулам (3), (4).

**Лемма.** *Для того, чтобы отображение* $f : H \to H$ *при* $q < 0$ *имело вид* $f = S^{-q}{}_\sigma \circ \varphi$, где $\varphi \in K_0(H)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f$ *можно было представить в виде* $f = \varphi^* \circ S^{-q}{}_{\sigma^*}$, где $\varphi^* \in K_0(M^*)$.

**Теорема 3.** *В случае сепарабельного гильбертова пространства H оба подхода к построению бесконечномерных $K_0$-относительных гомотопических групп равносильны, т.е. при любом $q \in Z$ и каждой пунктированной паре $(X,A,x_0)$ из H группы $\Pi^\sigma{}_q(X,A,x_0)$ и $\Pi^M{}_q(X,A,x_0)$ изоморфны между собой при любом выборе ортонормированного базиса σ и подпространства (соотв. надпространства) M коразмерности q пространства H.*

**Следствие.** При любом $q \in Z$ группы $\Pi^\sigma{}_q(X,A,x_0)$ с точностью до изоморфизма не зависят от выбора ортонормированного базиса $\sigma$ пространства $H$.

В случае сепарабельного гильбертова пространства $H$ каждую из изоморфных групп $\Pi^\sigma{}_q(X,A,x_0)$ и $\Pi_q(X,A,x_0)$ и $\Pi_q(X,A,x_0)$ будем называть бесконечномерной $K_0$-гомотопической группой коразмерности $q \in Z$ пары $X,A$ в точке $x_0$.

**Замечание 2.** Как в пункте 2, строятся бесконечномерные $K_0$- гомотопические группы второго рода компактного типа, а также бесконечномерные $K$-гомотопические группы второго рода как некомпактного, так и компактного типа.

**Замечание 3.** Теорема 3 остается справедливой и для бесконечномерных $K_0$-гомотопических групп второго рода компактного типа, а также для бесконечномерных $K$-гомотопических групп второго рода, как для некомпактного, так и для компактного типа.

Ереванский государственный университет

## Литература

1. *Болтянский В.Г.* - Известия АН АрмССР. Математика. 1974. Т. 9. № 2.
2. *Мирзаханян Э.А.* - Уч. зап. ЕГУ. 1990. № 3.
3. *Мирзаханян Э.А.* - Уч. зап. ЕГУ. 1991. № 1.
4. *Мирзаханян Э.А., Болтянский В.Г.* - Известия АН АрмССР. Математика. 1974. Т. 9. № 5.
5. *Мирзаханян Э.А.* - Известия АН АрмССР. Математика. 1980. Т. 15. № 5.
6. *Мирзаханян Э.А.* - Известия АН АрмССР. Математика. 1998. Т. 33. № 6.

Է.Ա. Միրզախանյան

**Հիլբերտյան տարածությունում անվերջ չափանի հոմոտոպիական խմբերի որոշ տիպերի մասին**

Հոդվածը նվիրված է անվերջ չափանի հանրահաշվական տոպոլոգիային, այն է՝ իրական (ոչ անպայման սեպարաբել) $H$ Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների կետադրված զույգերի անվերջ չափանի հարաբերական հոմոտոպիական խմբերի որոշ տիպերի կառուցմանը: Բոլոր կառուցումների հիմքում ընկած են $H$ տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների երկու հատուկ $K_0 \subset K$ դասեր:

1-ին ենթագլխում տրվում են $K_0$ և $H$ թույլատրելի դասերի սահմանումները, ինչպես նաև այդ դասերին պատկանող արտապատկերումների մասին որոշ տեղեկություններ: Այդ դասերի հիմնական հատկությունների մի շարք մասնավորապես պարունակվում են [1-6]:

2-րդ ենթագլխում նկարագրվում է $H$ տարածության ենթաբազմությունների կետադըրված զույգերի անվերջ չափանի հարաբերական հոմոտոպիական խմբերի կառուցման (առաջին կոչվող) մի մոտեցում, որի հետևանքով սահմանվում են այսպես կոչված $K_0$ (համապատասխանաբար $K$) - անվերջ չափանի հոմոտոպիական խմբերը: Ավելի արդյունավետ կիրառությունների նպատակով պահանջելով սֆերոիդներից և նրանց հոմոտոպիաներից կոմպակտության տիպի որոշ պայմանների բավարարելիություն, նույնպես սահմանվում են այսպես կոչված կոմպակտային տիպի $K_0$ (համ. $K$) - անվերջ չափանի հոմոտոպիական խմբերը:

3-րդ ենթագլխում $H$ տարածության սեպարաբելության դեպքում նկարագրվում է կոմպակտային և ոչ կոմպակտային անվերջ չափանի հարաբերական հոմոտոպիական խմբերի կառուցման երկրորդ մոտեցումը, որը հիմնված է $H$ տարածության օրթոնորմալացված բազիսի գաղափարի վրա: Թեորեմ 3-ի համաձայն դիտարկվող երկու մոտեցումները համարժեք են, այսինքն՝ բերում են իզոմորֆ խմբերի: