УДК 514.752

В.А. Мирзоян

Классификация Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах

(Представлено академиком А.А. Талаляном 13/X 1999)

Римановы *Ric*-полупараллельные пространства, характеризуемые полупараллельностью тензора Риччи R_1($R(X,Y) \cdot R_1 = \nabla_X\nabla_Y R_1 - \nabla_Y\nabla_X R_1 - \nabla_{[X,Y]}R_1 = 0$,R (X,Y) - операторы кривизны) являются естественными обобщениями симметрических ($\nabla R = 0$, где R - тензор кривизны), эйнштейновых ($R_1=\lambda I$, λ = const), полусимметрических ($R(X,Y) \cdot R = 0$) пространств и римановых пространств с параллельным тензором Риччи ($\nabla R_1 = 0$). В этой связи Ric-полупараллельные пространства и их изометрические погружения стали предметом интенсивного исследования на протяжении последних тридцати лет (см. обзор [1]). Общая структурная теорема для Ric-полупараллельных пространств, доказанная автором в [2], гласит, что риманово пространство M класса C^∞ удовлетворяет условию $R(X,Y) \cdot R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно либо двумерно, либо эйнштейново, либо полуэйнштейново, либо локально является произведением таких пространств.

Классификационные задачи были решены сначала для гиперповерхностей, удовлетворяющих некоторым более сильным условиям, чем условие *Ric*-полупараллельности. Локальная классификация эйнштейновых гиперповерхностей в евклидовом пространстве E_n давно известна (см. [3]). В пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ ($c \neq 0$) локальная классификация эйнштейновых гиперповерхностей дана А. Фиалковым [4]. Полные среди них классифицированы П. Раяном [5], который также классифицировал гиперповерхности с параллельным тензором Риччи в $M_n(c)$[6]. В E_n полные гиперповерхности с типовым числом $t(x) \geq 3$, удовлетворяющие условию $R(X,Y) \cdot R = 0$, классифицированы К. Номидзу [7]. Полная классификация таких гиперповерхностей в E_n (без условия $t(x) \geq 3$) дана З. Сабо [8]. Локальная классификация гиперповерхностей, удовлетворяющих условию $R(X,Y) \cdot R = 0$, в E_n получена Й. Деприи [9] на основе классификации гиперповерхностей, удовлетворяющих условию $\overline{R}(X,Y)\cdot\alpha_2 = 0,$ где α_2 - вторая фундаментальная форма, а $\overline{R}(X,Y)$- оператор кривизны связности Ван дер Вардена - Бортолотти. Подмногообразия, удовлетворяющие условию $\overline{R}(X,Y)\cdot\alpha_1 = 0,$ называются полупараллельными [9] или полусимметрическими [10]. В силу импликации $\overline{R}(X,Y)\cdot\alpha_2 = 0 \Rightarrow R(X,Y)\cdot R = 0$ полупараллельные подмногообразия имеют внутреннюю геометрию полусим-метрического риманова пространства. В пространствах ненулевой постоянной кривизны гиперповерхности, удовлетворяющие условию $R(X,Y) \cdot R = 0$ классифицированы П. Раяном [5]. Более того, в [6] им было доказано, что в $M_n(c)(c\neq 0)$ для гиперповерхностей условия $R(X,Y) \cdot R = 0$ и $R(X,Y) \cdot R_1=0$

эквивалентны.

В настоящей работе дается полная локальная классификация и геометрическое описание Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовом пространстве E_{m+1}, которая в совокупности с указанными выше классификационными реультатами других авторов завершает классификацию Ric-полупараллельных гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны.

Приведем сначала определение полуэйнштейновых пространств и конусов над римановыми пространствами.

Пусть M - риманово пространство, а $x \in M$ - произвольная точка. Подпространство $T_x^{(0)}$ касательного пространства $T_x(M)$, определенное равенством $T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M); R(X,Y) = 0\ \forall Y \in T_x(M)\}$, называется пространством дефектности в точке x, а его размерность - индексом дефектности. Пространство $T_x^{(0)}$ было определено С. Чженем и Н. Кюйпером [11]. Распределение $T^{(0)}$ инволютивно и вполне геодезично. $T_x^{(0)}$ всегда содержится в подпространстве собственных векторов тензора Риччи R_1, отвечающих нулевому собственному значению. Его ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ в $T_x(M)$ инвариантно относительно всех операторов R(X,Y) и тензора R_1. Риманово пространство M с ненулевым индексом дефектности в каждой точке *x* называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи R_1 на каждом инвариантном подпространстве $T_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение [2].

Пусть R^+ обозначает положительную полуось и пусть $\tilde{M}$ - некоторое риманово пространство с метрикой $d\tilde{s}^2$. Многообразие $M = R^+ \times \tilde{M}$, наделенное метрикой $ds^2 = dt^2 + t^2 d\tilde{s}^2$, называется конусом (с одномерными образующими) над $\tilde{M}$.

Справедлива следующая классификационная

Теорема. Гиперповерхность M в евклидовом пространстве E_{m+1} удовлетворяет условию $R(X,Y) \cdot R_1=0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью либо

(1) гиперсферы S^m в E_{m+1}, либо

(2) гиперконуса вращения C^m в E_{m+1}, либо

(3) произведения $S^n \times E_{m-n}$, где S^n - гиперсфера в E_{n+1}, а E_{m-n} - (m–n)-мерная плоскость, n=2, …, *m*–1, либо

(4) произведения C^n?E_{m-n}, где C^n - гиперконус вращения в E_{n+1}, а E_{m-n} - (m–n)-мерная плоскость, n=2, …, m–1, либо

(5) гиперповерхности ранга ≤ 2, либо

(6) полуэйнштейновой гиперповерхности K^m в E_{m+1}($m \geq 5$), характеризуемой следующими свойствами: (а) K^m несет трехкомпонентную сопряженную систему, состоящую из двух сфер $S^p(r_1)$ ($p \geq 2$), $S^q(r_2)$($q \geq 2$) и прямой L, причем секционые кривизны между сферами $S^p(r_1)$ и $S^q(r_2)$ отрицательны, (б) прямое произведение $S^p(r_1) \times S^q(r_2)$ является эйнштейновым подмногобразием с положительной эйнштейновой константой в E_{m+1} и принадлежит гиперсфере $S^m(r) \subset E_{m+1}$, радиусы r_1, r_2, r - линейные

(не постоянные) функции на L и $r^2=r^2{}_1+r^2{}_2$, (в) в каждой точке $x \in K^m$ тензор Риччи имеет на прямой L нулевое собственное значение, а в ортогональном (m–1)-мерном направлении, т.е вдоль произведения $S^p(r_1) \times S^q(r_2)$, он имеет только одно отрицательное собственное значение, (г) K^m представляет из себя конус с одномерными плоскими образующими (прямая L в качестве образующей в каждой точке) над эйнштейновым подмногообразием $S^p(r_1) \times S^q(r_2)$, (д) условие p=q необходимо и достаточно, чтобы гиперповерхность K^m была минимальной, либо
(7) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где K^n - полуэйнштейнова гиперповерхность в E_{n+1}, описываемая, как и K^m, в п. (6), а E_{m-n}– (m–n)-мерная плоскость, n=5,…, m–1.

При доказательстве этой теоремы существенно используются результаты автора о конусах с многомерными плоскими образующими над эйнштейновыми пространствами [12,13].

Государственный инженерный университет Армении

Литература

1. Мирзоян В.А. - Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Проблемы геометрии. 1991. Т.23. С. 29-66.
2. Мирзоян В.А. - Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 80-89.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. - Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
4. Fialkow A. - Ann. Math. 1938. V. 39. P. 762-785.
5. Ryan P.J. - Tôhoku Math. J. 1969. V. 21. P. 363-388.
6. Ryan P.J. - Osaka J. Math. 1971. V. 8. № 2. P. 251-259.
7. Nomizu K. - Tôhoku Math. J. 1968 V. 20. № 1. P. 46-59.
8. Szabo Z.I. - Acta Sci. Math. 1984. V. 47. № 3-4. P. 321-348.
9. Deprez J. - Rend. semin. mat. Univ. politecn. Torino. 1986. V. 44. № 2. P. 303-316.
10. Лумисте Ю.Г. - Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Проблемы геометрии. 1991. Т. 23. С. 3-28. № 2. P. 251-259.
11. Chern S.S., Kuiper N. - Ann. Math. 1952. V. 56. № 3. P. 422-430.
12. Мирзоян В.А. - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. № 4. С. 265-268.
13. Мирзоян В.А. - Изв. НАН Армении. Математика. 1998. Т. 33. № 5. С. 40-46

Վ.Ա. Միրզոյան

Ric-կիսազուգահեռական հիպերմակերևույթների դասակարգումը վկլիդեսյան տարածություններում

Էվկլիդեսյան n-չափանի E_n տարածությունում M ենթաբազմաձևությունը կոչվում է Ric-կիսազուգահեռական, եթե նրա R_1 Րիչչի տենզորը կիսազուգահեռական է, այսինքն՝ բավարարում է հետևյալ պայմանին. $R(X,Y) \cdot R_1=0$, որտեղ R(X,Y)-ը կորության օպերատորն է: Ենթաբազմաձևությունների այս դասը ընդգրկում է սիմետրիկ, կիսասիմետրիկ, էյնշտեյնյան և կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևությունները: Ric-կիսազուգահեռական հիպերմակերևույթների մասնավոր դասերը դասակարգված են [3-9] աշխատություններում: Տվյալ աշխատանքում տրվում է Ric-կիսազուգահեռական հիպերմակերևույթների լիակատար դասակարգումը և նրանց երկրաչափական նըկարագրությունը E_n-ում: