УДК 239.374

Г. В. Геворкян

Прочность плиты при концентрации напряжений

(Представлено академиком М. А. Задояном 9/II 2000)

Теоретические исследования прочности тела при различных условиях сводятся к решению задачи о состоянии тела с точки зрения малонапряженности или концентрации напряжений в угловой точке. Если тело не имеет концентрационных точек или концентраторов, то вопрос ограничивается обычным классическим методом вычисления границ прочности тела (материала). Однако особый интерес представляет состояние концентрации напряжений - ведь в реальных условиях в большинстве случаев технически невозможно избежать этого состояния. Возникает вопрос о вкладе концентрации напряжений в уменьшение запаса прочности тела, а также о зависимости его от геометрических и механических параметров концентратора. Есть некоторые работы в этом направлении [1-3]. Настоящая работа тоже выполнена для нахождения ответа на вышеуказанные вопросы, но только для частного случая - изгиба однородной плиты с концентратором. Для расчетов используется широко известный в строительной механике метод сечений [1].

Пусть однородная плита с поперечным угловым вырезом (со входящей угловой выточкой, в частности со щелью) подвергается поперечному изгибу (рис. 1). Допускается степенной закон упрочнения материала $\sigma_0=k\varepsilon_0^m$.

Согласно методу сечений нужно иметь решение в целом для изгиба такой плиты без входящей выточки, а также местное решение окрестности угловой точки выточки плиты [1,3]. Для решения первой задачи, т. е. решения в целом, берутся декартова система координат и классические приближения.

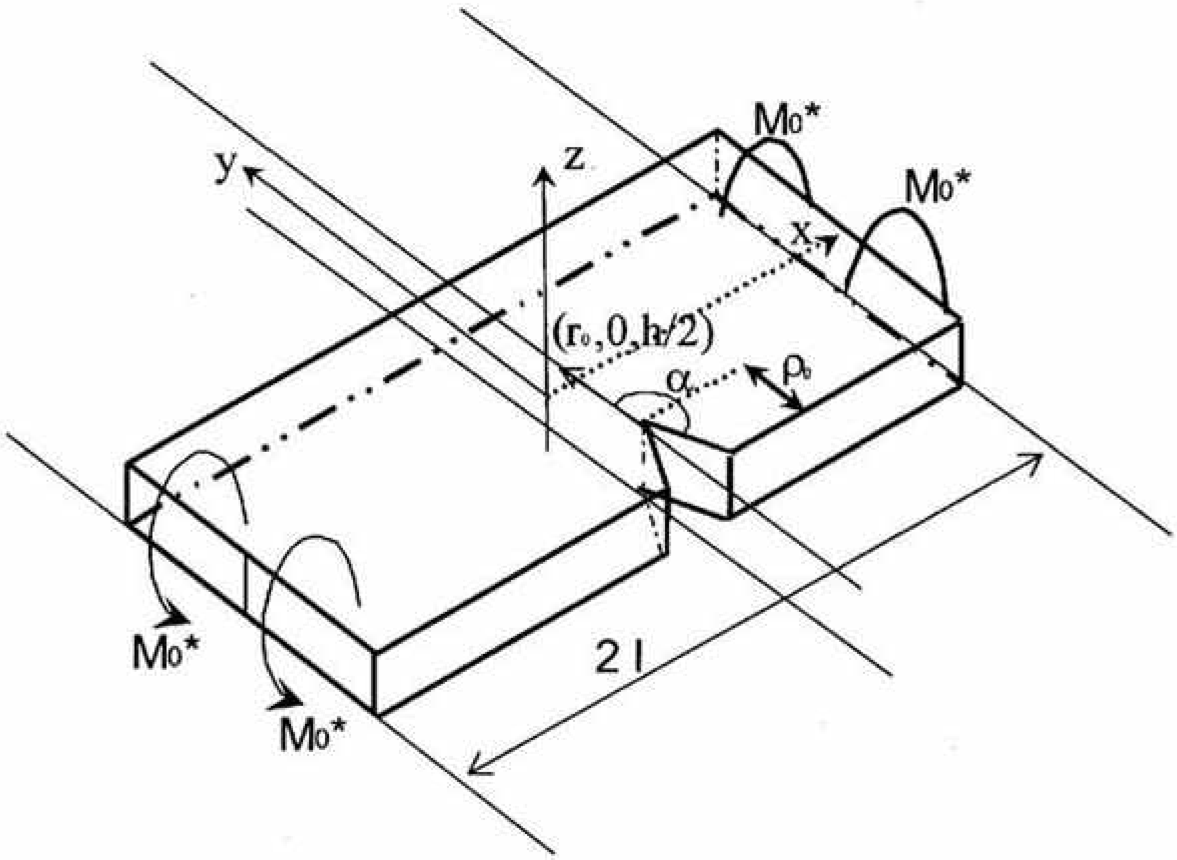

Рис. 1. Прочность плиты при концентрации напряжений.

Для изгибающих моментов имеем:

$$M_x = Dk_0^{m-1}\left(k_x + \frac{1}{2}k_y\right),$$

$$M_y = Dk_0^{m-1}\left(k_y + \frac{1}{2}k_x\right), \qquad (1)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}Dk_0^{m-1}k_{xy},$$

где $D = \dfrac{kh^{m+2}}{m+2}$,

$$k_0=\sqrt{k_x{}^2+k_xk_y+k_y{}^2+k_{xy}{}^2}\ ,$$

$$k_{ij}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\ . \tag{2}$$

Изгибающие моменты выражаются через напряжения

$$\sigma_{ij}(x,\,y,\,z)=\frac{M_{ij}(x,\,y)}{2I}\,z/z/^{m-1}\ ,$$

где h - толщина плиты и $I=[1/(m+2)]\,(\,[h/2]\,)^{\,m+2}$.

Из системы уравнений равновесия получаем

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=0\ . \tag{3}$$

Устанавливая выражения (1) для моментов в (3), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\,k_0{}^{m-1}\left(k_x+\frac{1}{2}k_y\right)\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[k_0{}^{m-1}\,k_{xy}]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\,k_0{}^{m-1}\left(k_y+\frac{1}{2}k_x\right)\right]=0\ . \tag{4}$$

Учитывая, что $k_y=0$; $k_{xy}=0$; $k_0=|\,k_x\,|$ и не зависят от y , т. е. перемещение $w=w(x)$, уравнение (4) примет следующую форму:

$$\frac{d^2}{dx^2}[\,|\,k_x\,|^{\,m-1}k_x\,]=0\ . \tag{5}$$

Решением этого уравнения является:

$$|\,k_x\,|^{\,m-1}k_x=c_0+c_1x\ . \tag{6}$$

Учитывая следующие граничные условия:

$$M_x\,|_{\,x=\pm l}=D\,|\,k_x\,|^{\,m-1}k_x\,|_{\,x=\pm l}=M_0\quad \text{и}\quad w_x\,|_{\,x=\pm l}=0\ ,$$

получим для номинального решения соответственно следующие выражения:

$$M_x=M_0 \ , \quad M_y=\frac{M_0}{2} \ ,$$

$$\sigma_x=\frac{M_0}{2I} z\,|\,z\,|^{\,m-1} \ , \quad \sigma_y=\frac{M_0}{4I} z\,|\,z\,|^{\,m-1} \ , \tag{7}$$

$$w=\frac{1}{2}\left(\frac{M_0}{D}\right)^{[1/m]}(l^2-x^2) \ .$$

А теперь рассмотрим местное решение согласно [4], полученное в цилиндрической системе (r, θ, z) координат.

Согласно нашей задаче материал несжимаем и упрочняем по степенному закону:

$$\overset{\frown}{\sigma}_0 = k\, \overset{\frown}{\varepsilon}_0^{\,m} \ , \qquad \overset{\frown}{\varepsilon}_r + \overset{\frown}{\varepsilon}_\vartheta + \overset{\frown}{\varepsilon}_z = 0 \ .$$

Для местного решения используется уточненная теория. Компоненты моментов будут:

$$\overset{\frown}{M}_r = Ak\, \overset{\frown}{I}\, r^{(\lambda-1)m}\left[\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi+\frac{1}{2}\phi'\right]\chi \ ,$$

$$\overset{\frown}{M}_\vartheta = Ak\, \overset{\frown}{I}\, r^{(\lambda-1)m}\left[\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi+\phi'\right]\chi \ ,$$

$$\overset{\frown}{M}_{r\vartheta} = A\frac{1}{4}k\, \overset{\frown}{I}\, r^{(\lambda-1)m}[\,\phi'+(\,\lambda-1\,)\,\phi]\,\chi \ , \tag{8}$$

$$\overset{\frown}{Q}_r = Ak\, \overset{\frown}{J}\, r^{(\lambda-1)m+1}[\,\phi+(\,\lambda+1\,)\,f\,]\,\chi \ ,$$

$$\overset{\frown}{Q}_\vartheta = Ak\, \overset{\frown}{J}\, r^{(\lambda-1)m+1}[\,f'+\phi]\,\chi \ ,$$

где $\chi = \left(\sqrt{\varphi'^2+(\lambda+2)\,\varphi\phi'+(\,\lambda^2+\lambda+1\,)\,\varphi^2+[1/4]\,[\,\varphi'+(\,\lambda-1\,)\,\phi]^2}\,\right)^{m-1}$, φ и ϕ есть функции напряжений, а A неопределенная постоянная (коэффициент) [4].

При малых r , т. е. для малой окрестности нашей угловой точки, имеем

$$\overset{\frown}{I} \approx \frac{h^{m+2}}{m+2}, \qquad \overset{\frown}{J} \approx \frac{h^{m}}{m}.$$

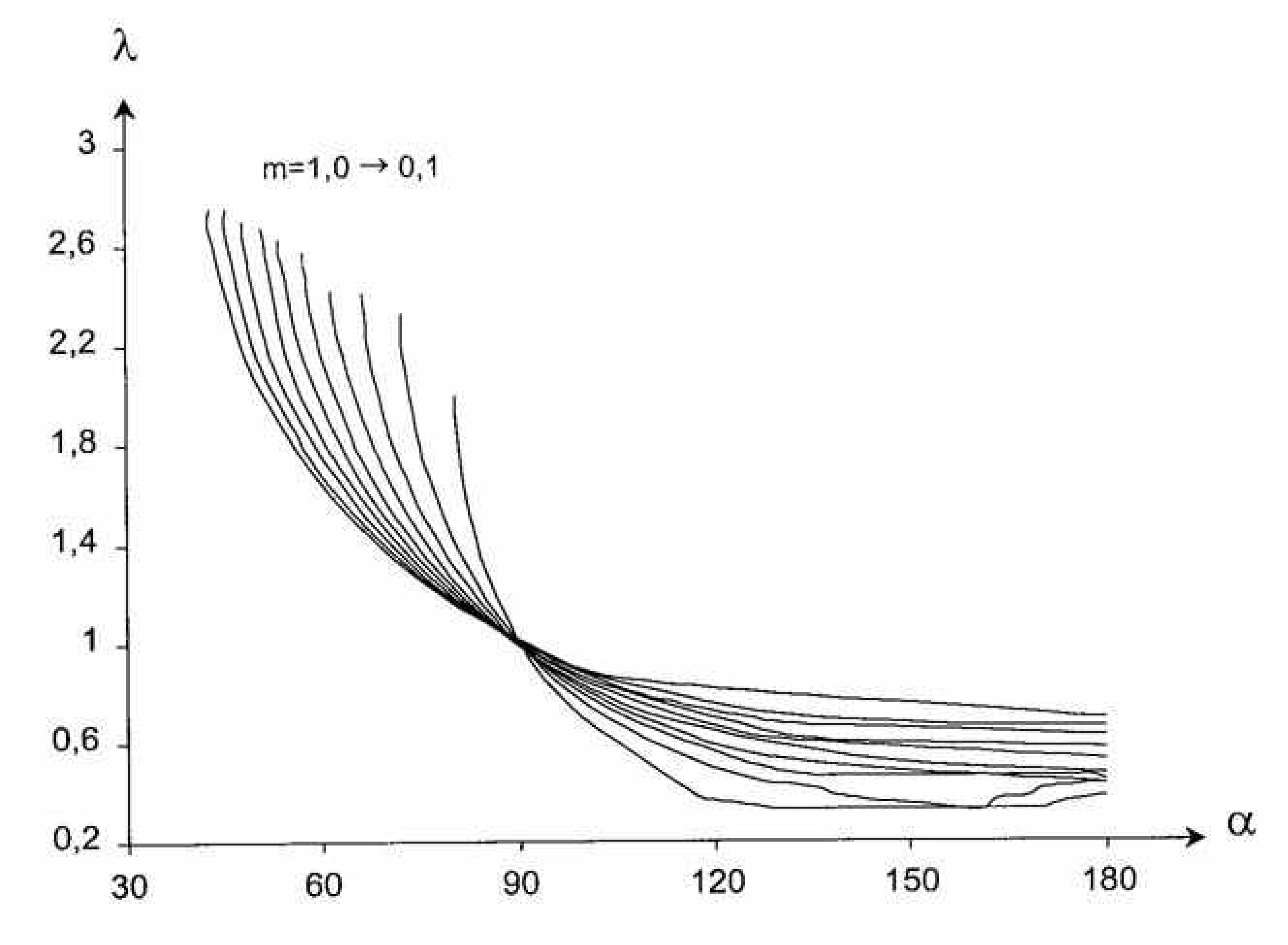

Рис. 2. Графики зависимости λ от угла выточки $(2\pi-2\alpha)$ при разных m.
Графики получены путем решения системы дифференциальных уравнений второго порядка из [4] численным методом.

На рис. 2 изображены графики зависимости λ от угла выточки при разных m, полученные путем решения системы дифференциальных уравнений второго порядка из [4] численным методом.

Имея номинальное (7) и местное (8) решения, согласно методу сечений получим

$$\overset{\frown}{M}_{\vartheta}(r_0, 0)=M_x(x|_{x=\alpha}, y|_{y=\rho_0+r})=M_0,$$

$$\int_0^{r_o} \overset{\frown}{M}_{\vartheta} (r\ ,\ 0)\, dr = \int_0^{\rho_o+r_o} M_x(\alpha,\ y)\, dy = M_0 \cdot(\rho_0+r_0)\ . \tag{9}$$

Подставляя выражения местных решений (8) в (9) , получим

$$r_0=\rho_0\left(\frac{1}{(1-\lambda)m}-1\right),$$

$$A k\, \overset{\frown}{I} = \frac{M_0}{\left[\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi(0\ ,\ \lambda)+\phi'(0\ ,\ \lambda)\right]\chi(0\ ,\ \lambda)}\left[\rho_0\left(\frac{1}{(1-\lambda)m}-1\right)\right]^{(1-\lambda)m}, \tag{10}$$

Выражения для [\frown || (M_θ)] (r , ϑ) напишем в следующих выражениях:

$$\overset{\frown}{M}_{\theta} (r\ ,\ \vartheta)= \frac{M_0}{\left[\rho_0\left(\frac{1}{(1-\lambda)m}-1\right)\right]^{(\lambda-1)m}}\, r^{(\lambda-1)m}\ \times$$

$$\times\ \frac{\left[\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\ (\vartheta,\ \lambda)\ +\phi'(\vartheta,\ \lambda)\right]\chi(\vartheta,\ \lambda)}{\left[\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\varphi\ (0,\ \lambda)\ +\phi'(0,\ \lambda)\right]\chi(0,\ \lambda)}\ . \tag{11}$$

После введения обозначений

$$N=\frac{M_0}{\left[\rho_0\left(\frac{1}{(1-\lambda)m}-1\right)\right]^{(\lambda-1)m}} \tag{12}$$

перепишем выражения (11) в форме

$$\overset{\frown}{M}_{\theta} (r\ ,\ \vartheta)=N r^{(\lambda-1)m}F(\vartheta)\ , \tag{13}$$

где

$$F(\theta)= [([([(\lambda)/2] +1) \varphi (\vartheta, \lambda) +\phi'(\vartheta, \lambda)] \chi(\vartheta, \lambda))/([([(\lambda)/2] +1) \varphi (0, \lambda) +\phi'(0, \lambda)] \chi(0, \lambda))] .$$

Из (13) видно, что N есть аналог коэффициента интенсивности напряжений из [1,3]. Поэтому назовем N коэффициентом интенсивности моментов. На рис. 3 изображены графики зависимости соотношения коэффициента интенсивности и разрушающего номинального момента (обозначен звездочкой) от угла выточки из формулы (12) при разных глубинах выточки и m .

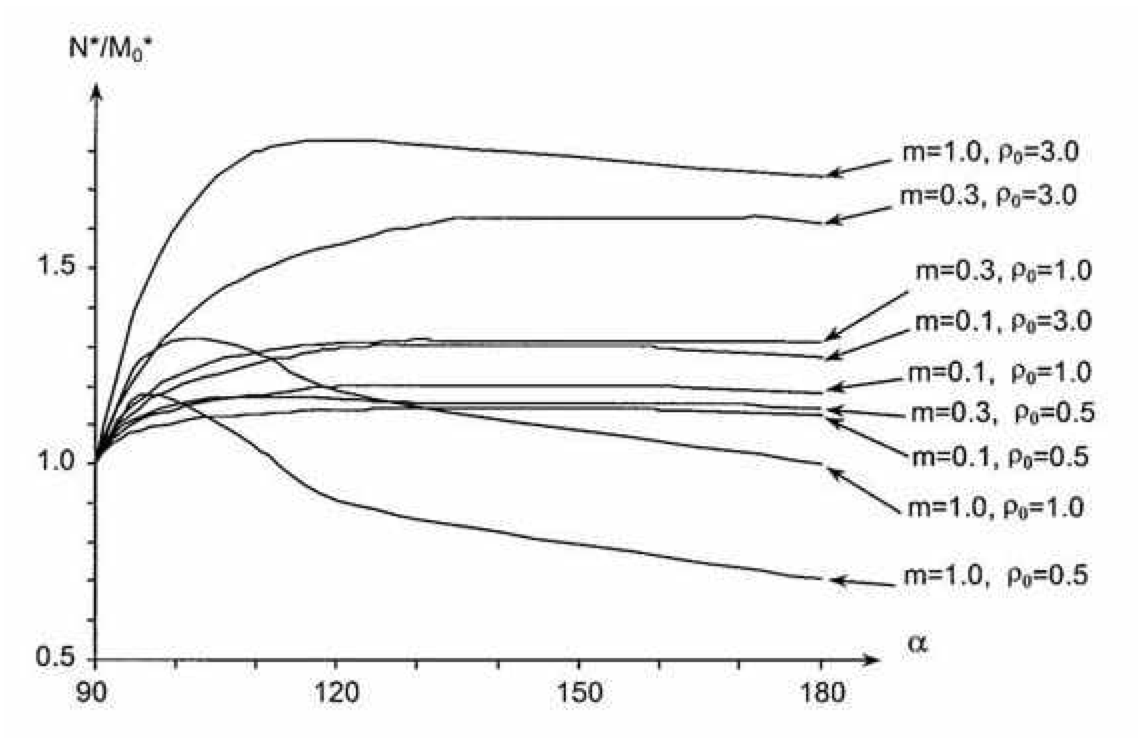

Рис. 3. Зависимость соотношения коэффициента интенсивности и разрушающего номинального момента от угла выточки.

Для местных разрушающих моментов (обозначены звездочкой) в окрестности угловой точки на линии x=0 или же ϑ = 0 из (12) получим

$$\overset{\frown}{M}{}^{*}_{\theta}(r, 0)= \frac{M_0^*}{\left[\dfrac{1}{(1-\lambda)m} - 1 \right]^{(\lambda-1)m}} \left(\frac{r}{\rho_o} \right)^{(\lambda-1)m} . \qquad (14)$$

Из формулы (14) видно, как будут вести себя значения моментов по мере приближения к концентрационной точке по линии y=a. На рис. 4 изображены графики зависимости соотношения местного разрушающего момента на линии $\vartheta=0$ и номинального разрушающего момента от соотношения расстояний от концентратора и глубины выточки при ее разных углах и m.

Из вышеприведенных формул видно, что экспериментально можно получить значения λ, которые зависят от угла входящей выточки и которые можно сверить с теоретическими расчетами.

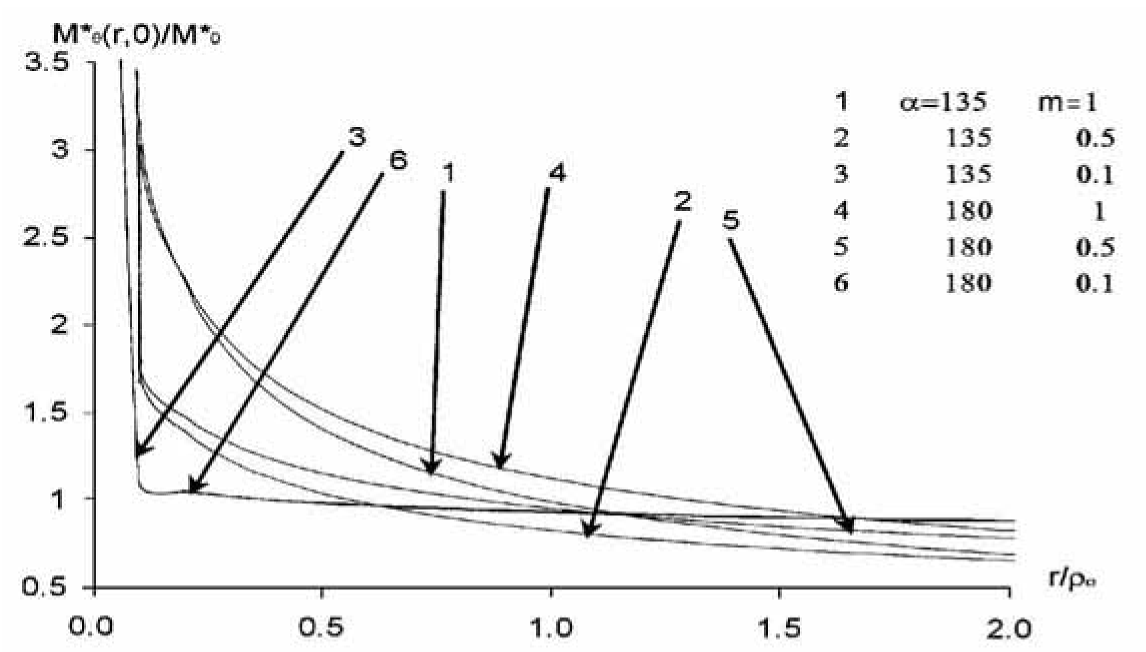

Рис. 4. Зависимость соотношения местного разрушающего момента на линии $\vartheta=0$ и номинального разрушающего момента от соотношения расстояния от концентратора и глубины выточки при ее разных углах и m.

Автор благодарит М. А. Задояна за обсуждения и ценные замечания об этой работе.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Партон В. З., Морозов В. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1992.
2. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 1-2. Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990.
3. Задоян М. А.- ПМТФ. 1997. Т. 38, N 6.
4. Задоян М. А.- ДНАН Армении. 1998. Т. 98, N 4. С. 269-273.

Գ. Վ. Գևորգյան

Սալի ամրությունը լարումների կոնցենտրացիայի դեպքում

Կատարված աշխատանքում դիտարկված է համասեռ սալերի ծռման դեպքում կրիտիկական (քայքայման) մոմենտների դաշտերի վարքագիծը սալերի համար կոնցենտրացիոն կետ (տիրույթ) հանդիսացող բացվածքների անկյունային կետերում: Հաշվարկներում օգտագործված է շինարարական մեխանիկայում լայնորեն կիրառվող հատույթների մեթոդը:

Համաձայն այդ մեթոդի, կատարվել է լարումների (մոմենտների) վերադրում կոնցենտրացիոն տիրույթում, բացվածքի բացակայող տիրույթի մոմենտների ինտեգրալային գումարի չափով, ինչպես նաև տեղական և ընդհանուր լուծումներից առաջացող մոմենտների կատարում:

Ընդհանուր լուծումը ստացվել է դասական տեսությամբ, դեկարտյան կոորդինատական համակարգում: Տեղական լուծումը ստացվել է ճշգրտված տեսությամբ՝ հաշվի առնելով կտրող ուժերը:

Արդյունքում ստացվել են լարումների ինտենսիվության և կրիտիկական մոմենտների արտահայտությունները: Այդ արտահայտություններով է տրվել կապը վերոհիշյալ մեծությունների և մարմնի ֆիզիկական ու երկրաչափական բնութագրիչների, ինչպես նաև դրանց հետևանք հանդիսացող վիճակը բնութագրող մեծությունների միջև:

Թվային եղանակով ստացվել են վերը նշված կախվածությունների գրաֆիկները, որոնք մեծ կիրառություն ունեն շինարարական և կիրառական մեխանիկայի ոլորտներում: